

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC  
CENTRO SÓCIO ECONÔMICO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

**BRUNO MÜLLER BERNZ**

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS E GESTÃO ATIVA  
DE RISCO APLICADOS AO MERCADO BRASILEIRO**

**FLORIANÓPOLIS  
2011**

**BRUNO MÜLLER BERNZ**

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS E GESTÃO ATIVA  
DE RISCO APLICADOS AO MERCADO BRASILEIRO**

Monografia submetida ao curso de Ciências  
Econômicas da Universidade Federal de Santa  
Catarina, como requisito obrigatório para a  
obtenção do grau de Bacharelado.

Orientador: Dr. André Alves Portela Santos

**FLORIANÓPOLIS**  
**2011**

**BRUNO MÜLLER BERNZ**

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS E GESTÃO ATIVA  
DE RISCO APLICADOS AO MERCADO BRASILEIRO**

A Banca Examinadora resolveu atribuir a nota 9,5 (nove vírgula cinco) ao aluno Bruno Müller Bernz na Disciplina CNM 5420 – Monografia, pela apresentação deste trabalho.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. André Alves Portela Santos  
Orientador

---

Prof. Dr. Gueibi Peres Souza  
Membro da Banca

---

Prof. Dr. Guilherme Valle Moura  
Membro da Banca

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, por ter me dado forças e iluminado meu caminho para que pudesse concluir mais uma etapa da minha vida.

Ao professor André Alves Portela Santos, meu orientador, pela disponibilidade e contribuições inestimáveis nesse trabalho, além da amizade e dos inúmeros exemplos de profissionalismo e talento.

À minha família, meus pais, Pedro e Cleusa, e minhas irmãs, Iara e Livia, que sempre me deram o incentivo que precisei para seguir em frente. Obrigado por tudo.

À Suellen, cuja presença foi essencial durante todo o percurso da minha vida universitária. Obrigado pela paciência, carinho e apoio em todo o período.

## RESUMO

Os modelos de otimização têm ganhado notoriedade na área das finanças em virtude de suas aplicações nos processos de alocação de ativos e gestão de carteiras de investimentos. O modelo mais conhecido, proposto por Harry Markowitz em 1952, baseia-se na ideia de minimização da variância dos retornos da carteira associada a um retorno médio. Conhecido como média-variância, este conceito revolucionou a teoria das finanças e proporcionou ao seu autor o Prêmio Nobel em Economia em 1990. Desde então, os modelos de otimização vêm abrindo o caminho para o desenvolvimento das finanças computacionais na solução de problemas complexos que envolvem a gestão de riscos e a alocação de ativos. Este estudo busca analisar e comparar a aplicabilidade de diferentes modelos de otimização de carteiras com o intuito de identificar uma metodologia que seja mais adequada para o mercado brasileiro. Foram analisados os excessos de retornos em relação ao ativo livre de risco, a variância, o Índice de Sharpe, e o *turnover* das carteiras otimizadas. Os resultados obtidos para o conjunto de dados utilizados indicam que os modelos aplicados são capazes de proporcionar resultados positivos tanto em termos absolutos como em termos de retorno ajustado ao risco, sobretudo quando comparados a uma estratégia ingênua de investimentos.

**Palavras-chave:** Alocação de Ativos, Otimização de Carteiras, Gestão Ativa de Riscos.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 - Curvas de Indiferença .....   | 27 |
| Figura 2 - Fronteira Eficiente .....   | 28 |
| Figura 3 - Identificação da melhor estratégia de alocação .....  | 29 |
| Figura 4 - Excesso de Retorno Acumulado para as estratégias de otimização por média-variância, mínima-variância e bandas de variância (Método Amostral de estimação da matriz de covariâncias), estratégia de alocação 1/N e IBOVESPA..... | 45 |
| Figura 5 - Pesos dos ativos da carteira variando ao longo do tempo para os modelos de otimização por média-variância, mínima variância e bandas de variância. Modelo amostral para estimação da matriz de covariâncias.....                | 50 |
| Figura 6 - Pesos dos ativos da carteira variando ao longo do tempo para os modelos de otimização por média-variância, mínima variância e bandas de variância. Modelo RiskMetrics™ para estimação da matriz de covariâncias.....            | 51 |
| Quadro 1 - Descrição dos ativos utilizados na pesquisa.....  | 41 |
| Quadro 2 - Estatística Descritiva dos ativos utilizados na pesquisa.....   | 42 |

## LISTA DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Média do excesso de retorno para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias. .... | 44 |
| Tabela 2 – Variância para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias. ....                   | 47 |
| Tabela 3 – Índice de Sharpe para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias. ....            | 48 |
| Tabela 4 – <i>Turnover</i> para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias. ....             | 49 |

## SUMÁRIO

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO.....</b>                                   | <b>8</b>  |
| 1.1 TEMA E PROBLEMA.....                                   | 9         |
| 1.2 OBJETIVOS .....  | 10        |
| 1.2.1 Objetivos Gerais .....                               | 10        |
| 1.2.2 Objetivos Específicos .....                          | 11        |
| 1.3 JUSTIFICATIVA .....                                    | 11        |
| 1.4 METODOLOGIA.....                                       | 12        |
| <b>2 REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>                         | <b>14</b> |
| 2.1 INTRODUÇÃO À GESTÃO DE RISCOS .....                    | 14        |
| 2.1.1 A história do risco .....                            | 15        |
| 2.1.2 O conceito de risco .....                            | 16        |
| 2.1.3 A importância do gerenciamento do risco .....        | 19        |
| 2.1.4 Risco de mercado.....                                | 20        |
| 2.2 INTRODUÇÃO À MÉDIA-VARIÂNCIA .....                     | 22        |
| 2.2.1 Média e variância de um ativo .....                  | 22        |
| 2.2.2 Média e variância de uma carteira de ativos .....    | 24        |
| 2.2.3 Curvas de Indiferença.....                           | 27        |
| 2.2.4 Fronteira Eficiente .....                            | 28        |
| 2.3 ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS .....              | 30        |
| 2.3.1 Otimização e Matrizes de Covariâncias .....          | 31        |
| 2.3.2 <i>Equally Moving Average</i> (Método Amostral)..... | 32        |
| 2.3.3 O modelo RiskMetrics™ .....                          | 33        |
| 2.4 OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS .....                          | 35        |
| 2.4.1 O modelo de média-variância .....                    | 36        |
| 2.4.2 O modelo de mínima-variância.....                    | 37        |
| 2.4.3 O modelo de bandas de variância .....                | 38        |
| <b>3 ESTIMAÇÃO DOS MODELOS E RESULTADOS OBTIDOS .....</b>  | <b>40</b> |
| 3.1 DADOS E FERRAMENTAS UTILIZADAS .....                   | 40        |
| 3.1.1 Descrição dos dados utilizados .....                 | 40        |
| 3.1.2 <i>Software</i> e pacotes computacionais .....       | 42        |
| 3.2 RESULTADOS .....                                       | 43        |
| 3.2.1 Excesso de retorno.....                              | 44        |
| 3.2.2 Variância .....                                      | 46        |
| 3.2.3 Índice de Sharpe.....                                | 47        |
| 3.2.4 <i>Turnover</i> da carteira .....                    | 48        |
| <b>4 CONCLUSÃO.....</b>                                    | <b>52</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                   | <b>53</b> |



## 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a economia brasileira vem conquistando estabilidade e se consolidando internacionalmente como potência emergente. Seu sistema financeiro relativamente desenvolvido, o grande mercado doméstico e sólidas contas externas têm colocado o país em posição privilegiada, tornando-o uma alternativa atraente para o investidor estrangeiro.

Neste contexto de amadurecimento econômico no Brasil, os mercados de capitais têm se desenvolvido de tal modo que seu papel tem sido diretamente associado ao desempenho econômico do país do qual faz parte. Segundo Alarcon (2005), no processo de evolução dos mercados, houve inicialmente um rápido avanço das tecnologias de informação e de processamento de dados, aliado aos processos de integração e desregulamentação de importantes praças financeiras. Como consequência destes fatores, pôde-se verificar a criação de um grande número de novos produtos negociáveis em bolsa de valores, um imenso crescimento do volume financeiro transacionado diariamente e o deslocamento de bancos para atividades não-tradicionais, potencializando tanto as chances de ganho como as possibilidades de perdas dos agentes.

Conscientes de que grandes retornos vêm sempre associados a grandes riscos, os grandes *players* do mercado têm se aventurado crescentemente em um contexto econômico de grande volatilidade do câmbio, taxas de juros, *commodities* e dos preços dos ativos em todo o mundo. Corrobora com esta ideia Jorion (1998), quando afirma que o motivo individual mais importante para a o crescimento da indústria de administração de risco é a volatilidade das variáveis financeiras. A imprevisibilidade e a rapidez das mudanças nos mercados financeiros nas últimas décadas têm trazido preocupação aos agentes e empresas de todo o mundo.

Esta percepção da necessidade de gerenciar a exposição ao risco resultante de carteiras compostas por instrumentos cada vez mais complexos transformou a gestão de risco em um tópico amplamente discutido em diferentes áreas de atuação, desde os agentes de mercado propriamente ditos tais como os bancos e outros administradores de recursos, passando por acadêmicos e órgãos reguladores.

Se do ponto de vista dos agentes de mercado, o denominador comum está na busca de soluções que minimizem o risco de perda de capital em virtude de operações mal conduzidas, pelo lado das autoridades de supervisão e regulação financeira, a preocupação está na possibilidade de que posições demasiadamente arriscadas, assumidas no plano microeconômico das instituições financeiras, possam repercutir de maneira sistêmica em uma conjuntura de preços desfavorável. (ALARCON, 2005, p.4).

Para Duarte Júnior (2005), o grande objetivo do gerenciamento de riscos é fornecer informações que auxiliem na tomada de decisão, de forma que os riscos decorrentes dos investimentos sejam conhecidos e, portanto, passíveis de serem administrados. Para o autor, medir precisamente as fontes de risco é a chave para o seu controle, obtendo-se assim uma gestão eficaz.

Neste sentido, a utilização de sistemas de gestão de risco possibilita às instituições financeiras auferir uma vantagem competitiva sobre seus concorrentes e, principalmente, fornecer ferramentas para criar uma administração quantitativa de suporte à decisão.

## 1.1 TEMA E PROBLEMA

Sob as condições atuais de volatilidade dos mercados, as operações financeiras requerem não apenas uma estrutura que seja capaz de medir e analisar os riscos de operações e negócios e já realizados, mas prover uma avaliação dos possíveis efeitos das transações antes que sejam efetivamente concretizadas, permitindo que as alocações sejam conduzidas buscando-se condições “ótimas” nas relações de risco-retorno.

Mediante essa necessidade, surge o conceito de “*Active Risk Management*” (gestão ativa de riscos), uma abordagem dinâmica que combina aspectos qualitativos e quantitativos utilizando-se de ferramentas sofisticadas para analisar as operações e seus efeitos no nível do portfólio antes da tomada de decisão. Desta forma, nas mais diversas instituições financeiras, as responsabilidades dos *risk managers* (gestores de risco), gestores de carteiras e *back-offices* (operações de retaguarda) estão se tornando permanentemente ligadas e interdependentes em um ambiente que requer o monitoramento *ex-ante* dos riscos.

Uma das aplicações mais importantes da gestão de risco ativa refere-se aos problemas de otimização de carteira. Segundo Brandimarte (2002), os métodos de otimização podem ser

aplicados à gestão de carteiras de investimentos com o objetivo de dimensionar o volume alocado em cada um dos ativos pertencentes a um conjunto de opções de investimentos.

O modelo mais conhecido de otimização baseia-se na ideia de minimização da variância dos retornos da carteira associada a um retorno médio. Esta é a teoria da média-variância proposta em 1952 por Harry Markowitz, que revolucionou as teorias das finanças e proporcionou ao seu autor o Prêmio Nobel em Economia em 1990. A partir de então, muitas abordagens para o problema de otimização de carteiras têm sido desenvolvidas.

Para Cornuejols e Tütüncü (2006), os modelos de otimização têm desempenhado um papel muito importante nas decisões financeiras, abrindo o caminho para o desenvolvimento das finanças computacionais na solução de problemas complexos que envolvem a gestão de riscos e a alocação de ativos.

Desta forma, genericamente, observa-se que os problemas de otimização encontrados na gestão de riscos de portfólios de investimentos tomam a seguinte forma: Otimizar uma medida de performance (como por exemplo o retorno esperado de um investimento) sujeito a restrições operacionais e a restrição de um limite máximo de risco.

Mediante o conhecimento das técnicas de gestão ativa de risco e a utilização de um ferramental computacional para estimação das volatilidades e da matriz de variâncias e covariâncias dos ativos selecionados, a problemática que o presente trabalho busca esclarecer é: É possível obter resultados satisfatórios (retornos ajustados ao risco) aplicando modelos quantitativos de otimização de carteiras no mercado brasileiro?

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é avaliar a aplicabilidade diferentes abordagens para a otimização de uma carteira diversificada com ativos brasileiros.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Apresentar o conceito de risco de mercado e os principais modelos de estimação do risco de um portfólio;
- Discutir o conceito de média-variância e os principais modelos de otimização de carteiras derivados dessa abordagem;
- Aplicar os modelos apresentados para uma carteira de investimento diversificada composta por ativos do mercado brasileiro;
- Identificar as causas de possíveis divergências entre os resultados obtidos pelos diferentes modelos, suas vantagens e limitações;
- Verificar se há, dentre os modelos estudados, algum que ofereça resultados satisfatórios;
- Verificar qual a metodologia mais apropriada para uma carteira de investimento diversificada composta com ativos do mercado brasileiro.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

O desenvolvimento da economia brasileira, associado aos processos de internacionalização e integração dos mercados financeiros mundiais, vem exigindo uma quantidade cada vez maior de profissionais que dominem as técnicas e ferramentas de controle e gestão de ativos financeiros.

Apesar do estudo do tema risco ser relativamente antigo no mundo das finanças, o assunto tem se mostrado cada vez mais atual e imprescindível para investidores, analistas financeiros e gestores de recursos. Assim, com o atual estágio de desenvolvimento das tecnologias da informação e da matemática computacional, tem sido possível elaborar modelos cada vez mais complexos e incorporar um número cada vez maior de variáveis com o objetivo de obter, da forma mais exata possível, o melhor valor estimado para a quantificação do risco de mercado e desta forma, gerar portfólios que sejam capazes de atender às necessidades de diferentes perfis de investidores com retornos consistentes e permanentemente adequados aos seus limites de risco.

Além da relevância relativa à comparação de modelos, soma-se o fato da pontualidade do tema, em vista às recentes crises financeiras e os consequentes picos de volatilidade evidenciados nos mercados financeiros de todo o mundo que vêm se estendendo desde o

colapso do crédito imobiliário “*subprime*” (hipotecas com alto risco de inadimplência) estadunidense, que têm afetado os comportamentos e volatilidades dos mercados financeiros ao redor do mundo.

Finalmente, o número reduzido de estudos envolvendo a avaliação dos métodos de otimização de carteiras de investimento com ativos brasileiros, mais voláteis e com características distintas dos mercados das economias desenvolvidas contribui para o enriquecimento do trabalho.

#### 1.4 METODOLOGIA

Conforme citado por Lakatos e Marconi (1991), o método científico utilizado na realização de uma pesquisa habilita o investigador a traçar o caminho a ser seguido para auferir resultados com maior segurança e economia.

O tema central deste trabalho – otimização de carteiras de investimento – refere-se a modelos quantitativos para dimensionar as posições de cada ativo a fim de maximizar as relações de risco-retorno do investimento. Neste estudo, alguns modelos selecionados são aplicados em um portfólio diversificado a fim de que sejam verificadas as diferenças e peculiaridades de cada modelo com o objetivo de eleger uma alternativa que seja mais adequada para a situação-problema.

Deste modo, para que houvesse articulação entre o marco teórico e os objetivos traçados, em primeiro momento foi realizada uma pesquisa descritiva/exploratória através de pesquisa bibliográfica, acerca dos principais conceitos, visando introduzir terminologias e expor o significado prático do problema. Assim, inicialmente são descritos aspectos qualitativos relacionados à questão do controle risco de mercado, abordando a maneira pela qual as transformações nas finanças internacionais, o aumento dos riscos financeiros em escala global e as mudanças observadas nos marcos regulatórios existentes estão associados. Na sequência do trabalho são apresentados os conceitos estatísticos que dão subsídio para a compreensão dos modelos de otimização selecionados para a avaliação empírica.

Após a pesquisa exploratória, foi realizado o procedimento de avaliação e comparação dos modelos, onde o conceito de otimização foi aplicado sistematicamente para um portfólio de ativos previamente definidos e seus resultados confrontados, buscando-se com isto, descrever suas características mais relevantes.

Para comparar a performance dos modelos, foi utilizada metodologia similar a DeMiguel e Nogales (2009) e Santos (2010) para avaliação da performance fora-da-amostra dos modelos de otimização de carteiras. Desta forma, inicialmente foram realizadas as estimações das médias e covariâncias dos 24 ativos com uma janela móvel  $t = 250$  observações, em base diária (1 ano). Para cada estimativa obteve-se uma carteira ótima para cada estratégia de otimização (média-variância, mínima-variância e bandas de variância). Repetiu-se o procedimento, adicionando um dado mais recente e excluindo-se o mais antigo (*rolling window*), até o fim do conjunto de  $L = 1254$  observações (5 anos). No fim do processo, obteve-se 1004 ( $L - t$ ) vetores de pesos para cada estratégia.

Para avaliação da performance fora-da-amostra de cada modelo foram utilizadas as seguintes medidas estatísticas: média do excesso de retorno em relação ao ativo livre de risco, variância, índice de Sharpe e *turnover* do portfólio. Sendo assim, no tocante à análise dos modelos, foi aplicada metodologia de caráter quantitativo.

Como ferramenta de cálculo, foi utilizado o *software* MATLAB, aplicando-se o sistema CVX (GRANT; BOYD, 2008) para otimização convexa. As séries históricas dos ativos foram obtidas através dos sistemas de gestão de risco e análise Quantum-Axis e Mitra-Riscos que utilizam como fonte primária terminais Bloomberg, e as bases de dados da BVMF-Bovespa e ANBIMA.

Após a apresentação dos resultados, o último capítulo do trabalho foi reservado às conclusões relacionadas à questão do gerenciamento de risco e modelos de otimização de carteiras, com a intenção de articular os resultados empíricos obtidos e os conceitos teóricos apresentados ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao final, foram ainda apresentadas sugestões para novos estudos acerca da temática abordada, bem como diferentes alternativas de aplicações.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico deste estudo tem como objetivo expor questões relacionadas a aspectos qualitativos e quantitativos da gestão de risco para que se possa compreender a evolução do conceito no percurso da história e a sua importância nos dias atuais. Assim, inicialmente serão discutidos diversos conceitos relacionados ao risco, a princípio de maneira ampla, para chegar ao caso específico do risco de mercado, a importância do tema e do seu gerenciamento nos contextos nacional e global.

Em segundo momento, serão abordados os conceitos estatísticos para a aplicação dos modelos econométricos. Desta forma, será exposta a Teoria Moderna da Carteira desenvolvida por Henry Markowitz em 1952, marco inicial de toda a teoria envolvida neste trabalho. Em seguida, serão debatidos modelos de estimação de volatilidade e da matriz de covariâncias, conceitos fundamentais para a compreensão das atividades de gerenciamento de risco e otimização de carteiras.

A parte final desta seção se ocupará de discutir algumas das alternativas de modelagem matemática para escolha da carteira ótima no contexto da prática diária do mercado financeiro. O intuito é fornecer as bases da implementação de metodologias variantes dos modelos tradicionais que possam efetivamente ser aplicadas no dia-a-dia das mesas de operações de fundos de investimentos.

### 2.1 INTRODUÇÃO À GESTÃO DE RISCOS

Esta seção do trabalho tem como objetivo expor a evolução do conceito de risco no mercado financeiro global e destacar a sua importância no contexto atual dos mercados de capitais. Será brevemente comentada a história do estudo do risco, desde os modelos iniciais até seus conceitos modernos, sua importância em termos de regulação do mercado financeiro e como ferramenta para tomada de decisão.

### 2.1.1 A história do risco

De acordo com Bernstein (apud Costa, 1997), o percurso da história do risco inicia-se com o estabelecimento dos fundamentos da ciência da estatística. Curiosamente, a palavra “estatística” deriva da análise de fatos quantitativos relacionados ao Estado. O objetivo primário da primeira coleta de dados demográficos era oferecer uma pesquisa de mercado ao comércio e fornecer ao governo as primeiras estimativas de número de pessoas disponíveis para o serviço militar, com o intuito de tornar o comércio e o governo mais seguros e regulares.

Com o desenvolvimento dos estudos estatísticos, surge o que hoje é conhecido como “teoria da tomada de decisões”, que envolve processos de decisão sob condições de incerteza sobre o futuro. Esta teoria foi determinante, haja vista que a tomada de decisão é o primeiro e essencial passo em qualquer esforço de administração do risco. A própria palavra “risco” deriva do italiano *risicare* (por sua vez derivado do baixo latim *risicu*, *riscu*), que significa “ousar”. Neste sentido, o risco, segundo sua definição de origem, se refere a uma opção, e não um destino. (BERNSTEIN apud COSTA, 1997).

A elaboração de conceitos tais como amostragens, médias e curva normal compõem as bases da análise estatística que buscam transformar números em informações a serviço da tomada de decisões e influenciam os graus de crença sobre as probabilidades de eventos futuros. Apesar de estes conceitos perdurarem até os dias atuais, com o passar dos séculos, surgem novas teorias e questionamentos envolvendo a distribuição da ocorrência de eventos e observações.

Ao estudar-se a distribuição normal, surge a necessidade não de indicar a exatidão dessa aplicação, mas seu erro. Surgem então as bases para as técnicas modernas de quantificação do risco: o conceito de desvio-padrão e a Lei das Médias, processo sistemático através do qual grande parte das pessoas realiza suas escolhas. Por exemplo, sempre que se toma uma decisão esperando que as coisas “voltem ao normal”, se está empregando o conceito de reversão à média.

Seguindo o raciocínio das regressões à média, chega-se ao conceito de correlação, que pode ser definido como sendo o grau de proximidade com que duas séries variam entre si.

Apesar das contribuições de inúmeros teóricos, dois autores foram determinantes para o desenvolvimento do conhecimento contemporâneo. Frank H. Knight e John Maynard Keynes foram os dois primeiros autores a enfrentar seriamente a questão de que os padrões do



passado não revelam sempre o rumo do futuro e definiram o risco como veio a ser compreendido atualmente, direcionando-o para o mundo dos negócios e das finanças.

Para Knight, a indeterminação do futuro não pode ser eliminada através da avaliação empírica das ocorrências passadas. Segundo ele, a incerteza tende a prevalecer sobre a probabilidade. Na visão de Keynes, uma vez que o ambiente econômico está constantemente em mudança, os dados econômicos referem-se especificamente ao seu próprio período de tempo e, portanto, previsões baseadas em distribuições passadas formam uma base excessivamente frágil e vulnerável.

Apesar das críticas e diversas teorias, a matéria-prima dos modelos de administração de risco atuais ainda são as séries históricas de dados. Deve-se salientar, no entanto, que o passado raramente revelará o que está por vir. Desta forma, a ciência da administração do risco jamais traçará um futuro perfeito e a turbulência sempre estará escondida nas imperfeições.

A questão reduz-se à visão da extensão em que o passado determina o futuro. Não podemos quantificar o futuro, por ser desconhecido, mas aprendemos a empregar números para esquadrihar o que aconteceu no passado. Mas até que ponto devemos confiar nos padrões do passado para prever o futuro? (BERNSTEIN, 1997, p.6).

Constata-se, segundo Costa (1997), que a história do risco é caracterizada por uma tensão persistente entre os que afirmam que as melhores decisões se baseiam na quantificação e nos números, sendo determinadas pelos padrões do passado ou da natureza, e os que baseiam suas decisões em graus de crença mais subjetivos sobre o futuro incerto. Essa é uma controvérsia jamais solucionada.

### **2.1.2 O conceito de risco**

Apesar dos grandes esforços de especialistas das mais diversas áreas do conhecimento científico, a capacidade do homem de antever o futuro permanece extremamente limitada. Todas as técnicas continuam sujeitas a um grau de erro razoavelmente elevado, sejam elas utilizadas na tentativa de previsão do tempo para o próximo dia ou do comportamento do preço de determinada ação. (MOLLICA, 1999).

De maneira geral, a literatura econômica atual aborda de duas maneiras distintas a questão do desconhecimento sobre eventos futuros. A primeira, cujos expoentes foram Frank H. Knight e John Maynard Keynes, segundo Alarcon (2005), se baseia no fato de que, sob um horizonte temporal futuro, prevalece a incerteza. Nesta corrente, defende-se uma situação em que não é possível acessar o conjunto completo de eventos factíveis e tampouco suas respectivas probabilidades de ocorrência. Nesta corrente, os conceitos de risco e de incerteza devem ser tratados de maneiras diferentes:

Segundo Knight (apud Hirshleifer & Hiley), o conceito de risco se aplicaria a situações em que um indivíduo calcula probabilidades em uma base objetiva, i. e., dispõe de um conjunto completo de informações e, a partir disto, é capaz de inferir logicamente sobre a ocorrência de determinado evento (por exemplo, a probabilidade de se verificar a ocorrência do número três em apenas um lançamento de um dado não-viesado é de um sexto). Já a incerteza estaria relacionada a situações em que não é possível atribuir uma classificação objetiva a determinado acontecimento futuro, devido à impossibilidade de se obter todas as informações relevantes para uma solução final adequada (por exemplo, é impossível inferir sobre a exata probabilidade de que chova no dia de amanhã, ainda que se possa atribuir elevado ou baixo grau de confiança na ocorrência deste evento). (ALARCON, 2005, p.1).

No entanto, foi Keynes quem contribuiu com maior destaque para o debate sobre risco e incerteza na economia. Defendendo a ideia que o futuro é algo ainda a ser criado a partir de decisões conjuntas tomadas no presente, Keynes afirma que é impossível assumir um nexo probabilístico exato para a ocorrência de eventos econômicos futuros.

[...] as decisões humanas que envolvem o futuro, sejam elas pessoais, políticas ou econômicas, não podem depender da estrita expectativa matemática, uma vez que as bases para realizar semelhantes cálculos não existem e que o nosso impulso inato para a atividade é que faz girar as engrenagens, sendo que a nossa inteligência faz o melhor possível para escolher o melhor que pode haver entre as diversas alternativas, calculando sempre o que se pode, mas retraindo-se, muitas vezes diante do capricho, do sentimento ou do azar. (KEYNES, 1936, p. 134).

Deste modo, a decisão do agente econômico tem que ser guiada por um comportamento em relação ao futuro que não se apoia somente em uma análise racional dos fatos, mas em uma disposição otimista para enfrentar um ambiente incerto e construir algo positivo. (MOLLICA, 1999).

Esse impulso inato, a qual Keynes se referiu na sua obra original como “*animal spirits*”, e que seria responsável pelas decisões de investimento por parte dos agentes

econômicos, não é, portanto, regido por uma lei matemática, mas está ligado ao que ele definiu como uma espécie de instinto construtivo, e que está relacionado a um maior ou menor grau de confiança em relação ao futuro.

Provavelmente, a maior parte das nossas decisões de fazer algo positivo, cujo efeito final necessita de certo prazo para se produzir, deve ser considerado como manifestação do nosso entusiasmo (*animal spirits*) – como um instinto espontâneo para agir, em vez de não fazer nada –, e não como resultado de uma média ponderada de lucros quantitativos multiplicados pelas probabilidades quantitativas. (KEYNES, 1936, p. 133).

A segunda abordagem teórica é defendida pela chamada escola neoclássica. Nela, admite-se que o conjunto de estados da natureza futuro, assim como as respectivas probabilidades de ocorrência, é conhecido e pode ser acessado de maneira subjetiva como resultado das preferências dos agentes. (KREPS apud ALARCON, 2005).

Explicita-se então um conjunto de axiomas de racionalidade através do qual é possível derivar as características de preferências dos agentes, cujas escolhas podem ser guiadas, exclusivamente, por um comportamento racional. (MOLLICA, 1999).

Apesar do fato de, segundo a abordagem neoclássica, considerar-se que o agente atribua probabilidades numéricas que representam seus graus de confiança em relação a eventos futuros e que, quanto maior o número de informações disponíveis, maior a crença nesses eventos, deve-se salientar que nesta concepção teórica também se admite que o conhecimento seja imperfeito, ou seja, o agente é incapaz de prever resultados futuros.

Sem dúvida todos que costumam acompanhar o mercado financeiro devem admitir que em determinados momentos o mercado se desprende de qualquer racionalidade e o que passa a dominar o comportamento dos agentes é o *animal spirits* Keynesiano. Em geral, este fato ocorre em períodos de crise, nos quais a incerteza sistêmica se impõe sobre todo e qualquer fundamento.

No entanto, sob condições normais dos mercados, acredita-se que seja possível adotar certos pressupostos razoáveis de racionalidade, o que acaba por tornar o conceito de risco neoclássico atrativo.

Desta forma, no decorrer deste estudo, o conceito de risco adotado se refere ao utilizado inicialmente pela escola neoclássica. Assim, ao abordar a questão do risco de mercado, o que se propõe aqui é quantificar a incerteza associada aos retornos financeiros de uma carteira diversificada de ativos negociados no mercado brasileiro. A técnica a ser

utilizada está baseada no conceito de média-variância, a qual busca analisar o *trade-off* entre risco e retorno.

### 2.1.3 A importância do gerenciamento do risco

A gestão de riscos é objeto de grande importância para instituições financeiras e não-financeiras. Segundo Varga e Duarte Júnior (2003), há na rotina dessas instituições uma necessidade crescente de abordar o assunto de forma bem estruturada, de acordo com a realidade específica de cada uma delas. Desta forma, a gestão de riscos vem se tornando uma obrigação em diversos países e, conseqüentemente, incluída também na rotina das instituições brasileiras.

A tarefa de gerenciar risco abrange diversas áreas de atuação, desde os agentes de mercado como instituições bancárias e *asset managers*, cujo foco de análise está no plano microeconômico e na busca pela redução da probabilidade de que operações mal conduzidas possam implicar em perdas excessivas, até órgãos reguladores, representados no Brasil pelo Banco Central, CVM e ANBIMA, cujo posicionamento quanto aos controles de risco é impedir que exposições excessivas no plano microeconômico das instituições financeiras possam acarretar em um contágio sistêmico para o lado real da economia. (ALARCON, 2005).

Percebe-se que, com as transformações do cenário econômico mundial nos últimos trinta anos, a atividade de intermediação financeira desenvolvida pelos bancos, que até a década de setenta convivia basicamente com o risco oriundo da concessão de créditos (risco de crédito) e da obtenção dos recursos monetários para fazer face aos pagamentos demandados por sua clientela (risco de descasamentos de prazos), passou a se defrontar com uma série de riscos de naturezas distintas.

Devido a estes fatores, Duarte Júnior (2003) define atualmente o risco como um conceito “multidimensional”. A fim de lidar estrategicamente com o tema, os bancos passaram a definir e criar áreas específicas para avaliação dos riscos associados às atividades cotidianas. A partir de definições criteriosas, foram sendo estruturadas áreas para o gerenciamento dos riscos financeiros, dentre as quais se destacam quatro grandes grupos: risco de mercado, risco operacional, risco de crédito e risco legal.

O risco de mercado, objeto principal deste estudo, pode ser definido como uma medida de incerteza relacionada aos retornos esperados de um investimento em decorrência de variações em fatores de mercado tais como taxas de câmbio, taxas de juros, preços de *commodities* e ações.

Risco operacional está ligado a uma medida das possíveis perdas em uma instituição caso seus sistemas, práticas e medidas de controle não sejam capazes de resistir a falhas humanas ou a situações adversas de mercado.

A definição de risco de crédito se refere a possíveis perdas em uma instituição caso uma contraparte em um contrato, ou um emissor de dívida, tenha alterada sua capacidade de honrar suas obrigações por *default* ou degradação de sua capacidade creditícia.

A última grande dimensão seria a do risco legal, o qual é definido como sendo uma medida das possíveis perdas em uma instituição caso seus contratos não possam ser devidamente amparados por falta de representatividade, documentação insuficiente, insolvência ou ilegalidade.

Para Gomes (2003), a qualidade de uma instituição financeira está diretamente ligada à sua capacidade de gestão de risco de crédito, de mercado e operacional. Assim, segundo o mesmo autor, a evolução das atividades bancárias levou à criação, dentro das instituições financeiras, de funções específicas para a gestão e controle destes riscos. A gestão dos riscos deixou então de vir apenas da experiência e visão do tomador de decisão e passou a envolver modelos mais sofisticados que permitem à organização dispor de uma visão mais ampla, homogênea e quantitativa dos riscos incorridos.

#### **2.1.4 Risco de mercado**

Entre as quatro dimensões de risco que devem ser consideradas na administração de recursos de terceiros, aquela que mais se destaca atualmente na rotina das empresas é a gestão de riscos de mercado. (DUARTE JÚNIOR, 2005).

Embora a gestão de risco de mercado seja uma atividade recente, o controle desse tipo de risco desenvolveu-se de maneira rápida e hoje é peça fundamental no mercado financeiro moderno. De acordo com Gomes (2003), após o surgimento dos derivativos na década de 80, os bancos deixaram de ser meros intermediários entre poupadores e tomadores de crédito e

passaram a transacionar operações que envolvem puramente a transferência de riscos, sem necessariamente haver troca de fundos.

Os riscos de mercado surgem de mudanças nos preços (ou volatilidades) de ativos e passivos financeiros, sendo mensurados pelas mudanças no valor das posições em aberto ou nos ganhos. Desta forma, segundo Gomes (2005, p. 32):

O controle dinâmico dos riscos de mercado é fundamental para garantir a segurança de uma organização, financeira ou não financeira, moderna. Se o tempo entre assumir um risco de crédito e a ocorrência de uma eventual perda é relativamente grande, de modo a permitir algum tipo de ação corretiva antes que o problema fuja ao controle, no caso do risco de mercado uma decisão errada pode, num caso extremo, quebrar uma instituição financeira num mesmo dia.

Há dois tipos de risco de mercado: o risco absoluto, cuja medida é dada pela perda potencial em moeda corrente, no caso o Real, e o risco relativo, relacionado a um índice de referência. Enquanto o risco absoluto foca a volatilidade dos retornos totais, o relativo mensura o risco em termos do desvio em relação a algum *benchmark*. (JORION, 1998).

No primeiro caso, o que se propõe é responder perguntas do tipo: Quanto uma determinada carteira de investimentos pode perder para um horizonte de investimento fixado? Esta forma de medição de riscos de mercado é especialmente importante no caso de administradores de investimentos preocupados em preservar o capital investido por seus clientes. Portanto, o acompanhamento do risco de mercado absoluto é importante para os carteiras de investimentos de gestão ativa, independentemente do *benchmark* adotado para aferição do desempenho.

O risco de mercado relativo visa responder questionamentos do tipo: Quanto determinada carteira de investimentos pode perder a mais/menos que o *benchmark* adotado? Esta forma de mensuração relativa é particularmente importante no caso de portfólios de gestão passiva, nos quais se busca a indexação da carteira a um índice de referência.

Segundo Duarte Júnior (2005), os fundos de administração passiva devem ter o acompanhamento feito através de medidas de risco de mercado relativo enquanto os fundos de gestão ativa devem utilizar tanto medidas de risco de mercado relativo como absoluto.

O processo de medição do risco de mercado em fundos de investimentos, por ser altamente técnico, requer conhecimentos relativamente sofisticados de modelagem matemática.

As medidas de risco de mercado podem ser vistas como extremamente úteis para o estabelecimento de um conjunto efetivo de controles internos de uma empresa de gestão financeira. Estas medidas podem auxiliar na monitoração do desempenho de fundos e administradores, para o estabelecimento de limites operacionais para os gestores de carteiras e conciliação das posições com os limites de controles internos.

Ainda segundo Duarte Junior (2005), a melhor maneira de utilizar medidas de risco de mercado na prática é encarando-as como indicadores que podem sugerir alguma determinada possibilidade de ação. A adoção ou não desta ação deve necessariamente ser analisada com prudência, uma vez que limites baseados em risco de mercado carregam limitações, como qualquer modelo matemático.

## 2.2 INTRODUÇÃO À MÉDIA-VARIÂNCIA

Uma vez compreendida a importância do tema no mercado financeiro, esta seção do trabalho visa expor de maneira mais aprofundada a Moderna Teoria das Carteiras, introduzida por H. Markowitz no início da década de 1950. É consenso que o maior mérito da teoria proposta por Markowitz foi colocar, pela primeira vez, em bases sólidas e matemáticas a relação entre risco e retorno.

Uma das mais importantes questões dentro da teoria das finanças está relacionada à administração eficiente de portfólios de investimentos. Não é por acaso que um tema já tão antigo permanece ao mesmo tempo tão atual.

### 2.2.1 Média e variância de um ativo

De maneira geral, os modelos quantitativos de investimentos encontrados na literatura utilizam como base teórica a análise da média-variância, ou seja, a expectativa da relação risco-retorno do ativo.

Segundo Varga (2005), os estimadores de média e variância são tomados com base em dados históricos, como se fossem bons estimadores do futuro desempenho do ativo, apesar do chavão *retornos passados não são garantia de retornos futuros*.

Ao se falar de expectativa de retorno de um determinado ativo ou valor esperado, os estatísticos normalmente recorrem ao conceito de média. Desta forma, Se  $N$  for o número de observações  $x_i$ , a média, ou retorno esperado,  $\mu = E(X)$ , pode ser expresso através da média amostral dos retornos:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

No entanto, para que uma decisão de alocação seja tomada, o investidor deverá não apenas considerar o retorno esperado dos ativos, mas também avaliar o risco de cada alternativa de investimento. Para conseguir um valor quantitativo para esse risco busca-se suporte nas medidas de dispersão da estatística, como variância e desvio-padrão, que oferecem um parâmetro para dizer o quanto a média é representativa de sua amostra. (SECURATO, 2008, p. 356).

Sendo assim, a variância,  $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ , pode ser estimada pela variância amostral:

$$\sigma^2 = \frac{1}{(N - 1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

Onde  $E[f(x)]$  representa o operador de valor esperado da função  $x$ .

A raiz quadrada de  $\sigma^2$  é o desvio-padrão de  $X$  (série de retornos do ativo), segundo Jorion (1998) costumeiramente chamada de volatilidade. Ela mede o risco de um ativo como a dispersão dos resultados em torno de um valor esperado, indicando o quanto os dados estão concentrados ou não ao redor da média. Se  $X$  for distribuído segundo uma distribuição normal padrão, ou seja,  $X \sim N(0,1)$ , então se espera que aproximadamente 68% das observações estejam compreendidos na área entre -1 e 1 desvio-padrão em relação à média.



### 2.2.2 Média e variância de uma carteira de ativos

Os conceitos abordados até aqui descrevem o cálculo da média e variância para o caso univariado, ou seja, para um único ativo. A partir dessas noções é possível estender o modelo para o caso multivariado, ou seja, para uma carteira de ativos.

Desta forma, considere um portfólio composto pelos ativos  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $R_p$  o retorno do portfólio, de modo que os retornos individuais são dados por  $R = [r_1, r_2, \dots, r_n]$  e a participação de cada ativo na carteira dada por  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ , tal que a soma dos pesos seja igual a um. (JORION, 1998).

O retorno da carteira de  $t$  a  $t + 1$  pode ser definido como:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,t+1}$$

Observe que, na equação acima, o retorno da carteira em  $t + 1$  está condicionado aos pesos conhecidos em  $t$ .

A equação acima, para efeitos de simplificação, pode ser transcrita mediante a utilização de notação matricial, substituindo-se as séries de números por um único vetor:

$$R_p = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = w' R$$

Onde  $w$  representa o vetor dos pesos e  $R'$  é o vetor transposto que contém os retornos individuais dos ativos.

Através da extensão de fórmulas já apresentadas anteriormente, o retorno esperado da carteira ( $R_p$ ) será:

$$E(R_p) = \mu_p = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i = w' \mu$$

Onde  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$  denota o vetor de retornos esperados de cada um dos ativos.

Assim, o cálculo do retorno esperado de uma carteira que combina vários ativos é simplesmente uma média ponderada dos retornos dos ativos individuais. No entanto, o mesmo não é válido para o risco, pois as correlações menores do que 1 geram carteiras com risco inferior à média ponderada dos riscos individuais. (VARGA, 2005, p. 371).

Desta forma, a variância da carteira será:

$$V(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j < i}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$

Em que  $\sigma_{ij}$  denota o termo de covariância entre os ativos  $i$  e  $j$ , e pode ser calculado pela fórmula:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{(T-1)} \sum_{t=1}^N (x_{t,i} - \mu_i)(x_{t,j} - \mu_j)$$

Onde,

$x_{t,i}$  = retorno do ativo  $i$  no período  $t$ ,

$\mu_i$  = retorno esperado do ativo  $i$ ,

$x_{t,j}$  = retorno do ativo  $j$  no período  $t$ ,

$\mu_j$  = retorno esperado do ativo  $j$ ,

$T$  = quantidade de períodos de tempo na análise.

A divisão por  $T - 1$  e não por  $T$  é devida à perda de um grau de liberdade ao se trabalhar com uma amostra e não com a população total dos dados.

Observa-se que, na fórmula da variância da carteira, além do risco individual de cada ativo  $\sigma_i^2$ , tem-se também todos os produtos cruzados, totalizando  $N(N - 1)/2$  covariâncias distintas.

Pode-se então, reescrever a expressão acima em notação matricial:

$$\sigma_p^2 = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_N] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

Definindo-se a matriz de covariâncias positiva definida como  $\Sigma$ , pode-se simplificar a fórmula da variância da carteira como:

$$\sigma_p^2 = w' \Sigma w$$

Assim, a questão central acerca da agregação do risco para portfólios, segundo Alarcon (2005), consiste em considerar a estrutura de correlações (ou covariâncias, haja vista que  $corr_{12} = \sigma_{12}/\sigma_1\sigma_2$ ) dos ativos em carteira. Desta forma, caso dois ativos tenham, por exemplo, correlação negativa, a queda do preço de um deles deverá ser acompanhada por uma elevação no preço do outro. Em termos agregados, o portfólio apresentará uma oscilação menor e, portanto, terá um risco total menor do que a média dos riscos individuais dos ativos que o compõem.

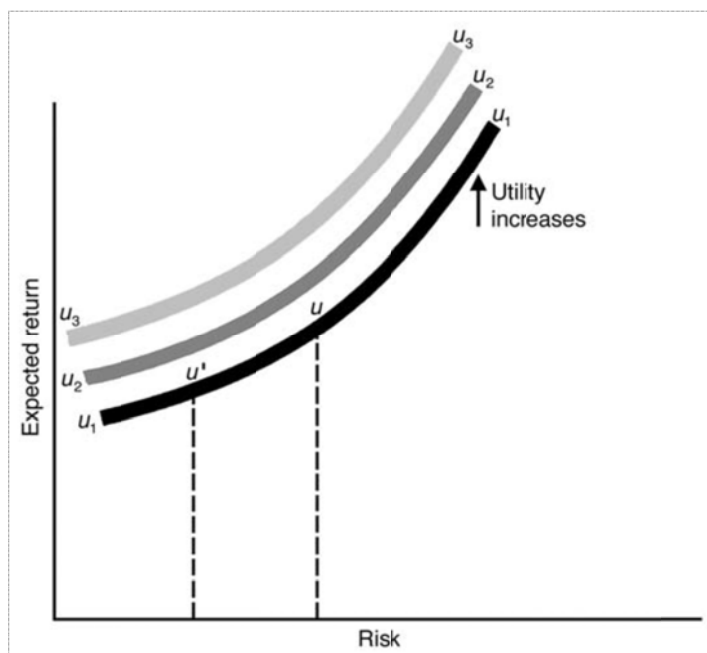
Observa-se, portanto, que carteiras com riscos menores podem ser obtidas através de baixas correlações ou uma grande quantidade de ativos. Assim, o risco da carteira deverá ser menor do que a soma dos riscos individuais. (JORION, 1998).

### 2.2.3 Curvas de Indiferença

O conjunto de oportunidades de investimento com riscos e retornos distintos que deixam o investidor igualmente satisfeito caracteriza a formação de uma família de curvas de indiferença. (PYNDICK; RUBINFELD, 2002).

A inclinação positiva da curva de indiferença indica que o risco é indesejável. Desta forma, havendo mais risco, é necessário que haja um retorno esperado superior para que seja possível obter o mesmo nível de utilidade, ou seja, o investidor requer um maior retorno esperado para assumir maior risco.

Importante notar que sem a hipótese de aversão ao risco, as curvas de indiferença seriam linhas retas para um investidor indiferente ao risco e côncavas para baixo para um investidor amante do risco.



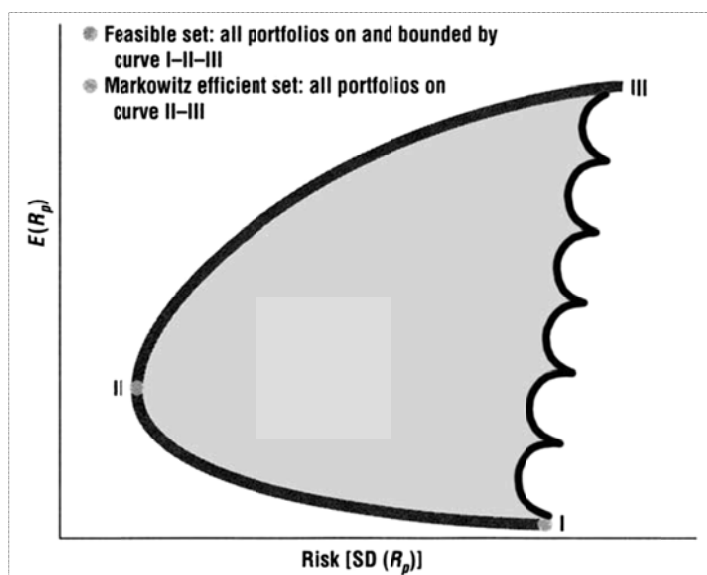
**Figura 1 - Curvas de Indiferença**  
**Fonte: FABOZZI (2007, p. 484)**

Havendo 3 curvas de indiferença (figura 1), e dado um risco estabelecido, o investidor preferirá estar em  $U_3$  a  $U_1$  ou  $U_2$ , uma vez que é a alternativa com maior retorno esperado entre as oportunidades existentes para quaisquer níveis de risco. Assim, a curva  $U_3$  é a que possui maior utilidade, enquanto  $U_1$  é a que possui a menor.

### 2.2.4 Fronteira Eficiente

A fronteira eficiente de investimento pode ser representada por uma curva não decrescente que contém as melhores relações entre risco e retorno. Desta forma ela delimita um conjunto de estratégias de investimento que ofereçam a máxima expectativa de retorno para diferentes valores de risco ou, analogamente, que apresentem o mínimo risco para diferentes expectativas de retorno.

A figura 2 mostra uma representação gráfica da fronteira eficiente para um conjunto de ativos de risco.



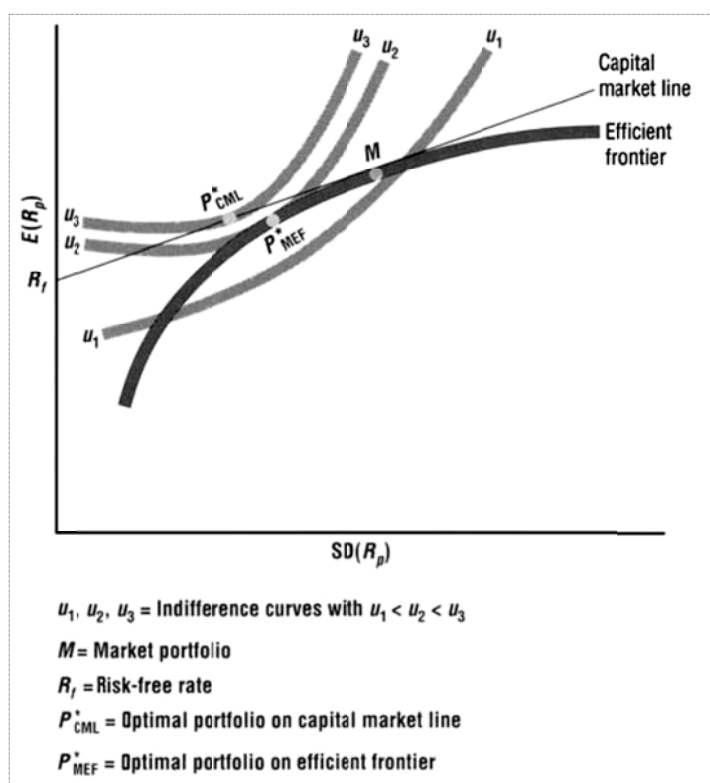
**Figura 2 - Fronteira Eficiente**  
 Fonte: FABOZZI (2007, p. 475)

A área cinza abrange todas as combinações possíveis de risco e retorno esperados. A linha curva delimitada pelo segmento II-III na figura é chamada de fronteira eficiente, pois compreende todas as estratégias ótimas possíveis para o conjunto de ativos. A fronteira delimitada pelo segmento I-II não é eficiente, pois para qualquer ponto desta fronteira existe outro ponto na fronteira delimitada pelo segmento II-III que para o mesmo nível de risco apresenta retorno esperado maior.

Através da sobreposição da curva de indiferença do investidor com a fronteira eficiente de um conjunto de ativos disponíveis é possível encontrar o ponto de otimização das estratégias de investimento para o investidor, conforme a figura 3. Em termos de função de

utilidade, o portfólio ótimo será aquele que possui a máxima utilidade. Assim, neste caso, o portfólio selecionado pelo investidor será aquele na fronteira eficiente que tangencia a curva de utilidade mais alta ( $U_2$ ), denotado por  $P_{MEF}$ . (FABOZZI, 2007).

Há uma diferença importante quando se adiciona um ativo livre de risco  $R_f$  na formulação da fronteira eficiente. Conforme demonstrado por William Sharpe<sup>1</sup>, James Tobin<sup>2</sup>, e John Lintner<sup>3</sup>, o conjunto de portfólios disponíveis aos investidores na fronteira eficiente em um mercado formado por um conjunto de ativos de risco e um ativo livre de risco é maior do que quando não há ativo livre de risco.



**Figura 3 - Identificação da melhor estratégia de alocação**

Fonte: FABOZZI (2007, p. 485)

Para este tipo de mercado a fronteira eficiente é definida pelo segmento de reta que parte do retorno do ativo livre de risco  $R_f$ , que é tangente à fronteira eficiente constituída

<sup>1</sup> William F. Sharpe, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance* (September 1964), pp. 425-442.

<sup>2</sup> Jams Tobin, "Liquidity Preference as Behavior Towards Risks", *Review of Economics Studies* (February 1958), pp. 65-86.

<sup>3</sup> John Lintner, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics* (February 1965), pp. 13-37.

apenas pelos ativos de risco do mercado. Esta linha tangente é chamada de Linha do Mercado de Capitais (CML), e pode ser visualizada também na figura 3.

Verifica-se, portanto, que a introdução de um ativo livre de risco implica em ganho de oportunidades de investimento, já que retornos maiores podem ser obtidos com mesma exposição ao risco quando comparado com um mercado constituído apenas de ativos de risco. (DANTAS, 2006).

Desta forma, é possível ao investidor auferir um retorno livre de risco  $R_f$  alocando toda sua riqueza no ativo livre de risco ( $w_{Rf} = 1$ ). Para a estratégia de investimento apontada pelo ponto de tangência  $M$ , toda a riqueza do investidor é alocada nos ativos de risco, e neste caso  $w_{Rf} = 0$ .

À esquerda de  $M$ , verifica-se a existência de portfólios que são combinações dos ativos de risco com o ativo livre de risco. As estratégias de investimento à direita de  $M$  indicam posicionamentos vendidos no ativo livre de risco, ou seja,  $w_{Rf} < 0$ . Nesses casos, o volume aplicado nos ativos de risco é maior do que a riqueza do investidor, implicando em carteiras alavancadas.

Comparando uma carteira na Linha do Mercado de Capitais com uma carteira na Fronteira Eficiente, é possível notar que para o mesmo nível de risco, o retorno esperado é maior no primeiro caso, ou seja, quando há um ativo livre de risco na composição do portfólio. Pode-se, portanto, afirmar que a introdução de um ativo livre de risco implicará na escolha de um portfólio da Linha do Mercado de Capitais pelo investidor, que representa uma combinação do ativo livre de risco e o portfólio eficiente  $M$ .

## 2.3 ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

Segundo Alexander (2008), uma vez que as volatilidades e correlações podem ser identificadas através da matriz de covariâncias dos retornos dos ativos, sua análise é fundamental para a estimação e previsão de risco das carteiras.

Dentre as diversas aplicações no mundo financeiro, as matrizes de covariâncias podem ser utilizadas, entre outros objetivos, para:

- Estimaco e previso da volatilidade de portfólios lineares<sup>4</sup>;
- Estimaco do *Value-at-Risk* (VaR) de portfólios lineares;
- Determinaco de alocaes de carteiras ótimas de um grupo de ativos com risco;
- Simulao de retornos correlacionados de um grupo de ativos ou taxas de juros;
- Estimaco do *Value-at-Risk* de portfólios no lineares;
- Precificao de opes “*multi-asset*” (opes que possuem mais de um ativo subjacente);
- “*Hedgear*” o risco de carteiras.

Uma vez que o tema central deste trabalho  a aplicao de modelos de otimizao, o texto discorrido nessa seo ser direcionado para esse objetivo.

### 2.3.1 Otimizao e Matrizes de Covarincias

De acordo com Michaud e Michaud (2008), a matriz de covarincias  um resumo das estimativas de risco associadas aos ativos em um modelo de otimizao. Para tanto, sua forma matemtica  representada por uma matriz quadrada simétrica com o número de linhas e colunas igual ao número de ativos (ou fatores de risco), onde o elemento  $(i, j)$   a covarincia entre o  $i$  – simo e o  $j$  – simo ativo.

De forma geral, em estudos que envolvem alocao de ativos, estima-se uma matriz de covarincia amostral com dados das series históricas de retorno. Essa abordagem assume que os ativos individuais so independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.).

 importante lembrar que quando se utiliza dados históricos para construir uma estimativa, implicitamente supõe-se que o passado fornece uma boa estimativa para o futuro. No entanto,  senso comum que, de fato, isso no ocorre devido ¢ incerteza (varincia) que existe na determinao do retorno esperado de um ativo. Em consequência, retornos passados extrapolados so, em geral, previsões pouco confiveis dos futuros retornos, ou, conforme jargo encontrado em todo “*disclaimer*” (aviso legal) de prospectos de investimento: a rentabilidade obtida no passado no representa garantia de retorno futuro. (FABOZZI, 2007).

---

<sup>4</sup> Portfólio definido como uma funo linear dos retornos dos ativos que o compõem.



Neste trabalho serão abordadas duas alternativas para estimação da matriz de covariâncias. A primeira será a matriz de covariâncias amostral calculada a partir dos desvios-padrão dos retornos utilizando-se uma média móvel igualmente ponderada (*Equally Moving Average*). Apesar de atualmente em desuso, o objetivo desta aplicação será evidenciar o modelo clássico de otimização proposto por Markowitz, que tem base nesse arcabouço teórico.

O segundo modelo de estimação da matriz de covariâncias aplicado será o conhecido como RiskMetrics™, que utiliza retornos exponencialmente ponderados (*Exponentially Weighted Moving Average*). Trata-se de um modelo largamente utilizado no mercado financeiro e que traz significativas melhorias teóricas e práticas quando comparado ao modelo inicial.

### 2.3.2 *Equally Moving Average* (Método Amostral)

A utilização de retornos históricos com igual ponderação foi o primeiro método estatístico para estimação de volatilidades e correlações entre ativos a ser aceito academicamente, sendo também adotado como padrão no mercado financeiro. (ALEXANDER, 2008).

Conforme mencionado por Alarcon (2005), a suposição subjacente a esse modelo é a de que os retornos são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), ou seja, supõe-se que os retornos em  $t$  e  $t-1$  não devem apresentar nenhum grau de correlação e que devem apresentar média e desvio-padrão constantes. Desta forma, assume-se que a matriz de covariâncias é constante ao longo do tempo. Em termos estatísticos, o método supõe que os vetores de retornos são gerados por uma distribuição normal multivariada.

Sabe-se, contudo que a hipótese de retornos i.i.d. não se verifica na prática. Ao contrário, uma característica das series temporais financeiras é justamente que a variância se modifica ao longo do tempo e apresenta dependência temporal explícita dos retornos mais recentes. Além disso, evidências empíricas apontam que as correlações tentem a sofrer rupturas em momentos de estresse dos mercados implicando em sucessivas falhas dos modelos menos flexíveis.

Para o cálculo dos estimadores, aplicam-se diretamente as fórmulas apresentadas nas seções 2.2.1 e 2.2.2, porém ao invés de utilizar-se toda a amostra, utiliza-se uma janela móvel

(*rolling window*) com número fixo de retornos. Segundo Mollica (1999), o uso de uma janela reduzida pode contornar o fato de todos os dados receberem o mesmo peso, controlando-se assim a importância do retorno mais recente através da escolha do tamanho da janela.

No entanto, é fundamental ter em mente que, independentemente do tamanho da janela amostral utilizada para o cálculo, o método estará sempre estimando um parâmetro de volatilidade (ou correlação) incondicional dos retornos, ou seja, uma constante que não muda no decorrer do processo. Assim, conforme salientado por Alexander (2008), o problema com a utilização da média móvel com retornos igualmente ponderados é que este modelo tenta aplicar um estimador de volatilidade constante em uma previsão de volatilidade que varia no tempo, ou seja, há um erro teórico na sua aplicabilidade em séries financeiras.

### 2.3.3 O modelo RiskMetrics™

O RiskMetrics™ é uma metodologia desenvolvida pelo banco J. P. Morgan para estimar o risco de mercado (MORGAN, 1996). A primeira versão do RiskMetrics™ foi apresentada em outubro de 1994, e nos dois anos seguintes foram feitos testes para adaptar e adequar a metodologia e o formato dos dados. Esta metodologia consiste na construção de uma grande matriz de covariância dos retornos de ativos, tais como taxas de juros, taxas de câmbio, ações e *commodities*.

A concepção do modelo do RiskMetrics™ baseia-se no fato de as variâncias dos retornos serem heterocedásticas (não constantes) e autocorrelacionadas. Além disso, as covariâncias são também autocorrelacionadas. Como solução para capturar as dinâmicas da volatilidade é utilizado o conceito de média móvel exponencial das observações históricas dos retornos, onde as últimas observações recebem os maiores pesos para a estimativa da volatilidade (*Exponentially Weighted Moving Average – EWMA*).

Assim, o modelo RiskMetrics™ calcula a volatilidade na data  $t$  ( $\sigma_t$ ) a partir da seguinte expressão:

$$\sigma_t = \sqrt{\lambda \cdot \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \cdot (r_{t-1} - \mu_{t-1})^2}$$

Onde,

$\sigma_{t-1}$  é a volatilidade até o instante  $t - 1$ ;

$\mu_{t-1}$  é a média dos retornos calculados até o instante  $t - 1$ ;

$r_{t-1}$  é o retorno calculado no instante  $t - 1$ ;

$\lambda$  é o fator de decaimento.

O fato de que a estimativa da variância do período depende da variância do período anterior é consistente com a afirmação de que existe autocorrelação nos quadrados dos retornos.

Para o cálculo das covariâncias, é possível generalizar a fórmula acima para:

$$Cov_t(x_i, x_j) = \sqrt{\lambda Cov_{t-1}^2(x_i, x_j) + (1 - \lambda)(r_{x_i} - \mu_{x_i})_{t-1}(r_{x_j} - \mu_{x_j})_{t-1}}$$

Onde,

$Cov_{t-1}(x_i, x_j)$  é a covariância de  $x_i, x_j$  até o instante  $t - 1$ ;

$\mu_{t-1}$  é a média dos retornos de  $x_i$ ;

$r_{x_i}$  é o retorno de  $x_i$ ;

$(r_{x_i} - \mu_{x_i})_{t-1}$  é o retorno menos a média de  $x_i$  calculado até o instante  $t$ ;

$\lambda$  é o fator de decaimento.

Desta forma, é possível simplificar a matriz de covariâncias  $\Sigma$  do modelo Riskmetrics™ através a notação matricial:

$$\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda)(R_{t-1} - \mu_{t-1})'(R_{t-1} - \mu_{t-1})$$

Conforme destacado por Alexander (2008), a estimação de volatilidade pelo modelo EWMA (RiskMetrics™) reagirá imediatamente após um retorno incomum, em seguida este efeito do retorno incomum gradualmente diminui ao longo do tempo.

O nível de reação da volatilidade aos eventos de mercado é determinado pela constante  $\lambda$  (lambda). Quanto maior  $\lambda$ , maior o peso atribuído às observações mais antigas, e mais

suaves são as oscilações. Assim,  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) é o fator de decaimento e determina os pesos relativos aplicados às observações dos retornos e a efetiva quantidade de dados usada na estimativa da volatilidade, desta forma, quanto menor  $\lambda$ , maior o peso dos dados mais recentes. O manual do RiskMetrics™ recomenda o uso de um  $\lambda$  padrão. Para chegar a esse número, calculou-se o  $\lambda$  para 480 séries temporais, obtendo-se uma média ponderada dos fatores de decaimento ótimos obtidos. O resultado foi 0,94 para volatilidades e correlações diárias e 0,97 para volatilidades e correlações mensais.

## 2.4 OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS

Segundo Brandimarte (2002), a gestão de carteiras de investimentos é uma aplicação já antiga dos métodos de otimização. Conforme anteriormente mencionado, após o trabalho de Markowitz publicado em 1952, as propostas de otimização de carteiras passaram a ser orientadas a partir da relação de risco e retorno.

Genericamente, os problemas de otimização encontrados na gestão de portfólios de investimentos tomam a seguinte forma: Otimizar uma medida de performance sujeito a restrições operacionais e a restrição de um limite máximo de risco.

Desta forma, esta seção do trabalho buscará descrever três modelos alternativos para otimização de carteiras de investimentos. Inicialmente será abordado o modelo de otimização por média-variância clássico, onde o procedimento adotado será o de encontrar uma composição que minimize o risco (variância) da carteira para um dado retorno futuro.

O segundo modelo adotado no trabalho será o de otimização por mínima-variância, que pode ser definido como um caso particular do modelo de média-variância. Este procedimento de otimização busca atribuir pesos para os ativos de forma a auferir o máximo ganho de diversificação e, consequentemente, a carteira ótima será a de menor volatilidade.

O terceiro modelo será uma adaptação da otimização por média-variância, no qual será pré-estabelecido um intervalo com limites máximo e mínimo para a volatilidade da carteira. O intuito será criar um modelo que otimize uma carteira com variância razoavelmente estável ao longo do tempo.

### 2.4.1 O modelo de média-variância

Segundo Santos (2010), a ideia adjacente à teoria da otimização por média-variância proposta por Markowitz é que indivíduos decidem suas opções de alocação baseados no dilema fundamental entre retorno esperado e risco. Baseados nesse arcabouço teórico, indivíduos optarão por portfólios que estejam localizados na fronteira-eficiente, que definem o conjunto de carteiras eficientes. Assim, um portfólio eficiente é aquele que maximiza o retorno esperado o retorno esperado para um determinado nível de risco.

É importante compreender que, ao calcular carteiras ótimas por média-variância, a escolha do nível de risco desejado depende da tolerância ao risco do investidor. Assim, investidores com maior aversão ao risco optarão por uma composição que ofereça menor volatilidade, penalizando performance.

Matematicamente, é possível tratar o modelo como um problema de minimização do risco para um dado retorno futuro, ou maximização do retorno esperado para uma dada variância. Embora sejam soluções equivalentes, nesse trabalho será utilizada a primeira opção, assim como em Santos (2010).

Assim, considerando a existência de  $N$  ativos com risco, com um vetor de retornos aleatórios  $R_{t+1}$  e um ativo livre de risco com retornos conhecidos  $R_t^f$  e definindo o excesso de retorno  $r_{t+1} = R_{t+1} - R_t^f$ , a média (retorno esperado) como  $\mu_t$  e a matriz de covariâncias como  $\Sigma_t$ , o problema de escolha da carteira pode ser definido como:

$$\min_x w' \Sigma w - \frac{1}{\lambda} E[r_{p,t+1}]$$

Sujeito a:

$$1'w = 1$$

Onde  $\lambda$  é uma constante relativa ao nível de aversão ao risco,  $w$  é o vetor de pesos dos ativos da carteira e  $\iota$  é o vetor unitário. Para a aplicação do modelo optou-se por utilizar  $\lambda = 1$ .

Ainda neste trabalho será incluída uma restrição de venda a descoberto:

$$w_i \geq 0$$

Esta restrição na formulação do problema, além de conveniente para aplicações práticas, pode melhorar a estabilidade dos pesos dos ativos ao longo do tempo (JAGANNATHAN; MA apud SANTOS, 2010).

#### 2.4.2 O modelo de mínima-variância

A carteira de mínima-variância corresponde a um caso específico da otimização por média-variância, sendo especificamente a opção com menor risco entre todas as carteiras eficientes. Desta forma, a carteira de mínima-variância corresponde à carteira de média-variância com parâmetro infinito de aversão ao risco.

Matematicamente, define-se o problema da seguinte maneira:

$$\min_x w' \Sigma w$$

Sujeito a:

$$\iota' w = 1$$

$$w_i \geq 0$$

É importante salientar que a carteira MV possui propriedades interessantes. Jagannathan e Ma (apud Santos, 2010) afirmam que o modelo possui menor erro de estimação já que o erro de estimação das covariâncias é menor que o das médias e, por definição, a carteira MV é independente do retorno esperado.

Há ainda evidências empíricas de que este modelo possui melhor performance “fora da amostra” do que quaisquer outros portfólios de média-variância, mesmo quando é utilizado o índice de Sharpe ou outra medida de performance que utiliza na sua fórmula a média e a variância na comparação.(DEMIGUEL; NOGALES apud SANTOS, 2010).

Embora estudos acadêmicos empíricos e teóricos tenham contemplado vários aspectos da otimização por média-variância, as aplicações práticas na vida real tem se direcionado para as carteiras de mínima-variância. Bausys (2009) cita um artigo publicado em 15 de setembro de 2008 no *Financial Times* que demonstra que um número expressivo de empresas de Asset Management nos Estados Unidos tinha como base estratégica de alocação apenas a otimização por mínima-variância, enquanto não havia sequer um gestor que utilizava qualquer outra estratégia baseada unicamente no conceito de média-variância.

#### 2.4.3 O modelo de bandas de variância

Ao contrário dos modelos anteriores, em que é apenas possível otimizar a carteira de investimento considerando o risco ou retorno do instante de tempo final, é possível definir um modelo com restrições intermediárias que considera também um intervalo de variância aceitável (bandas de variância) indicado pelo próprio modelo. Esta alternativa pode ser considerada uma adaptação do modelo de média-variância com restrições intermediárias, proposto por Nabholz (2006).

Esta proposta surge da constatação no dia-a-dia em uma empresa de gestão de recursos, onde é possível observar a preferência dos investidores por produtos, em especial fundos multimercados, que apresentem variância ativamente controlada, sem atingir picos nos momentos de crise. Essa característica pode trazer benefícios para clientes institucionais e fundos de fundos que trabalham com orçamento de risco em suas carteiras, por permitir um controle mais efetivo, uma vez que estas carteiras não são rebalanceadas com muita frequência.

Através desse problema é possível otimizar uma carteira com maior estabilidade em relação à variância, o que evitaria uma elevação brusca do risco em momentos de stress dos mercados. Reduz-se assim a possibilidade de perdas indesejadas, independentemente de momentos de crise ou turbulências.

Segundo Nabholz (2006), a grande vantagem desse tipo de modelagem é permitir que a variância da carteira ao longo de todo o horizonte de análise possa ser controlada e, ao mesmo tempo impedir que os níveis de volatilidade atinjam valores indesejáveis.

É possível definir o problema de otimização da seguinte maneira:

$$\max_x \mu'w$$

Sujeito a:

$$1'w = 1$$

$$w_i \geq 0$$

$$\textit{Limite inferior} \leq x'\Sigma x \leq \textit{limite superior}$$

Onde o limite inferior é dado pelo portfólio de mínima variância.

Para a aplicação prática neste trabalho, utilizou-se como limite superior de variância estimada 0,10, em base diária.



### 3 ESTIMAÇÃO DOS MODELOS E RESULTADOS OBTIDOS

Este capítulo tem com objetivo apresentar os procedimentos e os resultados obtidos para que se possa chegar às conclusões finais da pesquisa.

Inicialmente serão descritos os dados utilizados, bem como as ferramentas aplicadas. Em seguida, serão expostos os resultados obtidos com as estimações dos modelos.

#### 3.1 DADOS E FERRAMENTAS UTILIZADAS

##### 3.1.1 Descrição dos dados utilizados

Os dados aplicados na estimação dos modelos são de cotações de ativos e índices representativos das classes de ativos mais utilizados pelos gestores brasileiros, abrangendo ativos de renda fixa, moedas, renda variável e *commodities*.

Foram utilizados 5 anos de cotações diárias dos ativos entre os dias 02/01/2006 e 30/12/2010, totalizando 1254 observações.

O quadro 1 apresenta a lista com os 24 ativos selecionados. Foram selecionados ativos e índices representativos de ativos com boa liquidez e de forma segmentada, a fim de que fosse possível obter baixas correlações, e consequentemente ganhos de diversificação.

As séries históricas dos ativos foram obtidas através dos sistemas de gestão de risco e análise Quantum-Axis e Mitra-Riscos que utilizam como fonte primária terminais Bloomberg, e as bases de dados da BVMF-Bovespa e ANBIMA.

Apenas no caso das cotações do Petróleo foi necessária a interpolação de dados, em virtude de diferentes calendários de negociação. Também para este ativo, foi necessária sua conversão para a moeda local, já que na aplicação dos modelos foi suposta a negociação em Real (R\$).

No quadro 2 encontram-se as estatísticas descritivas das séries utilizadas.

| Ativo/Índice      | Descrição   | Classe de Risco      | Moeda |
|-------------------|---|----------------------|-------|
| CDI               | Taxa média dos Certificados de Depósitos Interbancários, divulgada pela CETIP   | Ativo livre de risco | BRL   |
| IENE_SPOT         | Moeda Japonesa - Iene   | Moedas               | BRL   |
| EURO_SPOT         | Moeda européia - Euro   |                      | BRL   |
| DOLAR_SPOT        | Moeda americana - Dólar   |                      | BRL   |
| IVBX-2            | Índice constituído por 50 papéis emitidos por empresas classificadas a partir da 11ª posição em termos de valor de mercado e liquidez. Representa as ações com capitalização mediana.                                       | Ações                | BRL   |
| IBOVESPA          | Índice constituído por papéis que representam conjuntamente 80% do volume transacionado à vista nos 12 meses precedentes à formação da carteira teórica. Representa as ações com maior capitalização do mercado brasileiro. |                      | BRL   |
| SMLL              | Índice criado para medir o comportamento das empresas de modo segmentado. Representa o retorno de uma carteira composta por empresas de menor capitalização.  |                      | BRL   |
| IDkA IPCA 10 Anos | Índices de Duração Constante ANBIMA IPCA. Medem o comportamento de carteiras sintéticas de títulos públicos federais indexados ao IPCA (NTN-B) com prazo constante.   | Renda Fixa IPCA      | BRL   |
| IDkA IPCA 2 Anos  |   |                      | BRL   |
| IDkA IPCA 3 Anos  |   |                      | BRL   |
| IDkA IPCA 5 Anos  |   |                      | BRL   |
| IDkA Pré 1 Ano    | Índices de Duração Constante ANBIMA Pré. Medem o comportamento de carteiras sintéticas de títulos públicos federais prefixados (LTN e NTN-F) com prazo constante.   | Renda Fixa Prefixado | BRL   |
| IDkA Pré 2 Anos   |   |                      | BRL   |
| IDkA Pré 3 Anos   |   |                      | BRL   |
| IDkA Pré 3 Meses  |   |                      | BRL   |
| IDkA Pré 5 Anos   |   |                      | BRL   |
| AÇÚCAR            | Commodities - Açúcar  | Commodities          | BRL   |
| ALGODÃO           | Commodities - Algodão   |                      | BRL   |
| OURO              | Commodities - Ouro  |                      | BRL   |
| BOI               | Commodities - Boi   |                      | BRL   |
| MILHO             | Commodities - Milho   |                      | BRL   |
| SOJA              | Commodities - Soja  |                      | BRL   |
| CAFÉ              | Commodities - Café  |                      | BRL   |
| PETRÓLEO          | Commodities - Petróleo  |                      | BRL   |

Quadro 1 - Descrição dos ativos utilizados na pesquisa.

Fonte: Elaboração própria

| Ativo/Índice      | Média     | Mediana   | Mínimo    | Máximo   | Desvio-Padrão | C.V.       | Enviesamento | Curtose Ex. |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------|------------|--------------|-------------|
| CDI               | 0,000443  | 0,000427  | 0,000324  | 0,000655 | 0,000081      | 0,182530   | 0,444330     | -0,295380   |
| IENE_SPOT         | 0,000133  | -0,000277 | -0,083763 | 0,106670 | 0,014657      | 110,590000 | 1,019900     | 9,977300    |
| EURO_SPOT         | -0,000121 | -0,000429 | -0,090932 | 0,097540 | 0,010587      | 87,460000  | 0,420690     | 13,461000   |
| DOLAR_SPOT        | -0,000205 | -0,000537 | -0,077586 | 0,076321 | 0,011475      | 55,866000  | 0,510910     | 8,115600    |
| IVBX-2            | 0,000591  | 0,000536  | -0,107440 | 0,148040 | 0,017944      | 30,348000  | 0,402170     | 8,663800    |
| IBOVESPA          | 0,000795  | 0,001189  | -0,113930 | 0,146590 | 0,020775      | 26,122000  | 0,241660     | 6,262600    |
| SMLL              | 0,000864  | 0,000890  | -0,102420 | 0,137550 | 0,017610      | 20,376000  | -0,074605    | 8,247500    |
| IDkA IPCA 10 Anos | 0,000660  | 0,000704  | -0,051519 | 0,040002 | 0,005644      | 8,553100   | -0,666700    | 14,345000   |
| IDkA IPCA 2 Anos  | 0,000569  | 0,000582  | -0,011352 | 0,011003 | 0,001461      | 2,569400   | -0,637010    | 12,269000   |
| IDkA IPCA 3 Anos  | 0,000587  | 0,000618  | -0,017120 | 0,016601 | 0,002344      | 3,992800   | -0,641130    | 10,332000   |
| IDkA IPCA 5 Anos  | 0,000604  | 0,000655  | -0,026415 | 0,020888 | 0,003671      | 6,081100   | -0,741150    | 9,968700    |
| IDkA Pré 1 Anos   | 0,000512  | 0,000523  | -0,010494 | 0,006322 | 0,000858      | 1,674800   | -2,861300    | 43,603000   |
| IDkA Pré 2 Anos   | 0,000555  | 0,000636  | -0,026342 | 0,013675 | 0,002313      | 4,169900   | -1,897000    | 27,172000   |
| IDkA_Pré 3 Anos   | 0,000585  | 0,000679  | -0,038838 | 0,021729 | 0,003824      | 6,534700   | -1,080200    | 17,122000   |
| IDkA Pré 3 Meses  | 0,000453  | 0,000441  | -0,000318 | 0,001420 | 0,000125      | 0,276170   | 0,642960     | 5,608700    |
| IDkA Pré 5 Anos   | 0,000646  | 0,000742  | -0,060292 | 0,039277 | 0,006855      | 10,617000  | -0,448110    | 11,112000   |
| AÇÚCAR            | 0,000430  | 0,000578  | -0,059764 | 0,040310 | 0,007405      | 17,201000  | -1,037900    | 9,955100    |
| ALGODAO           | 0,000758  | 0,000084  | -0,021797 | 0,031626 | 0,005538      | 7,302600   | 1,475000     | 6,236200    |
| OURO              | 0,000757  | 0,000000  | -0,143080 | 0,132040 | 0,017855      | 23,599000  | 0,114460     | 8,682400    |
| BOI               | 0,000582  | 0,000372  | -0,022036 | 0,029022 | 0,005235      | 8,997500   | 0,165960     | 3,479300    |
| MILHO             | 0,000411  | 0,000000  | -0,056180 | 0,078947 | 0,010119      | 24,603000  | 1,468000     | 11,984000   |
| SOJA              | 0,000787  | 0,000604  | -0,479550 | 0,956590 | 0,031998      | 40,660000  | 18,598000    | 674,070000  |
| CAFE              | 0,000455  | 0,000389  | -0,076161 | 0,062466 | 0,014028      | 30,835000  | -0,237590    | 2,329100    |
| PETROLEO          | 0,000364  | 0,000290  | -0,096148 | 0,210190 | 0,025200      | 69,174000  | 0,898260     | 7,612300    |

**Quadro 2 - Estatística Descritiva dos ativos utilizados na pesquisa.**

Fonte: Elaboração própria

### 3.1.2 *Software e pacotes computacionais*

Para aplicação da metodologia de avaliação da performance fora-da-amostra dos modelos de otimização de carteiras, todas as simulações foram realizadas em um PC Intel CORE i5 com 4Gb RAM. Utilizou-se como ferramenta de cálculo o software MATLAB, aplicando-se o sistema CVX (GRANT; BOYD, 2008) para a solução dos problemas de otimização convexa.

Desta forma, inicialmente foram realizadas as estimações das médias e covariâncias usando uma janela móvel  $t = 250$  observações em base diária. Utilizando-se cada estimativa foi calculada uma carteira ótima para cada estratégia de otimização (média-variância, mínima-

variância e bandas de variância), sistematicamente adicionando um dado mais recente e excluindo-se o mais antigo até o fim do conjunto de  $L = 1254$  observações.

### 3.2 RESULTADOS

Segundo Santos (2010), matematicamente, manter o portfólio  $w_t$  proporciona um retorno fora-da-amostra no período  $t + 1$ :  $\hat{r}_{t+1} = w_t^T r_t$ , onde  $\hat{r}_{t+1}$  é o excesso de retorno em relação ao ativo livre de risco (neste trabalho, a média dos retornos dos Certificados de Depósitos Interfinanceiros).

Para avaliação da performance fora-da-amostra de cada carteira otimizada, após o cálculo dos  $(L - T)$  retornos em excesso, foram calculados a variância como *proxy* do risco da carteira, o Índice de Sharpe para avaliação do excesso de retorno ajustado ao risco e o *turnover* do portfólio, conforme segue:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{L - T} \sum_{t=T}^{L-1} w_t^T r_{t+1}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{L - T - 1} \sum_{t=T}^{L-1} (w_t^T r_{t+1} - \hat{\mu})^2$$

$$\widehat{SR} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

$$Turnover = \frac{1}{L - T - 1} \sum_{t=T}^{L-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|)$$

Onde  $w_{j,t}$  é o peso do ativo  $j$  no portfolio antes do rebalanceamento e  $w_{j,t+1}$  é o peso desejado do ativo  $j$  no instante  $t + 1$ . Desta forma, o *turnover* do portfólio representa uma

medida de variabilidade nas posições da carteira e mede indiretamente os custos de transação que incidem sobre cada estratégia.

Para visualização do desempenho das estratégias e da estabilidade dos pesos, são ainda plotados gráficos de excesso de retornos acumulados e dos pesos dos ativos variando ao longo dos 1003 períodos calculados.

Para monitoramento dos resultados, foi ainda aplicada uma estratégia ingênua, na qual para cada ativo foi atribuído o peso  $1/N$ , com  $N = 24$  e corresponde ao número de ativos da carteira em que se retomam as proporções originais a cada período.

### 3.2.1 Excesso de retorno

As médias dos excessos de retorno para as diferentes estratégias e modelos de estimação da matriz de covariâncias são mostradas na tabela 1. Para ambos os modelos Amostral e RiskMetrics™, a estratégia de bandas de variância mostrou resultados significativamente superiores (0.0750 e 0.0359, respectivamente), seguidas, também em ambos os casos, pela estratégia de otimização por média-variância (0.0359 para o modelo Amostral e 0.0102 para o modelo RiskMetrics™). A estratégia ingênua de alocação e a otimização por mínima-variância obtiveram resultados próximos de zero ou negativos, mostrando médias de excesso de retorno pouco expressivas.

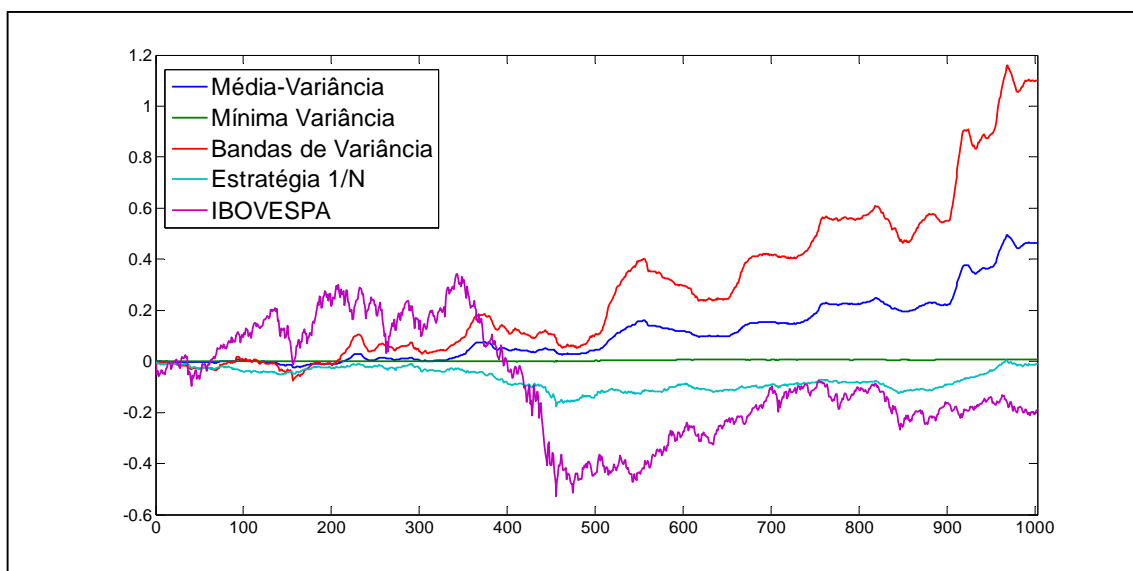
**Tabela 1– Média do excesso de retorno para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias.**

| Excesso de Retorno                 | Matriz de Covariâncias |              |
|------------------------------------|------------------------|--------------|
|                                    | Amostral               | RiskMetrics™ |
| <b>Markowitz (média-variância)</b> | 0.0359                 | 0.0102       |
| <b>Mínima-Variância</b>            | 0.0006                 | -0.0094      |
| <b>Bandas de Variância</b>         | 0.0750                 | 0.0359       |
| <b>1/N</b>                         | -0.0005                | -0.0005      |

**Fonte:** Elaboração própria.

A figura 4 mostra o gráfico com o excesso de retorno acumulado para as diferentes estratégias de otimização, além da estratégia 1/N e o índice da bolsa de valores de São Paulo

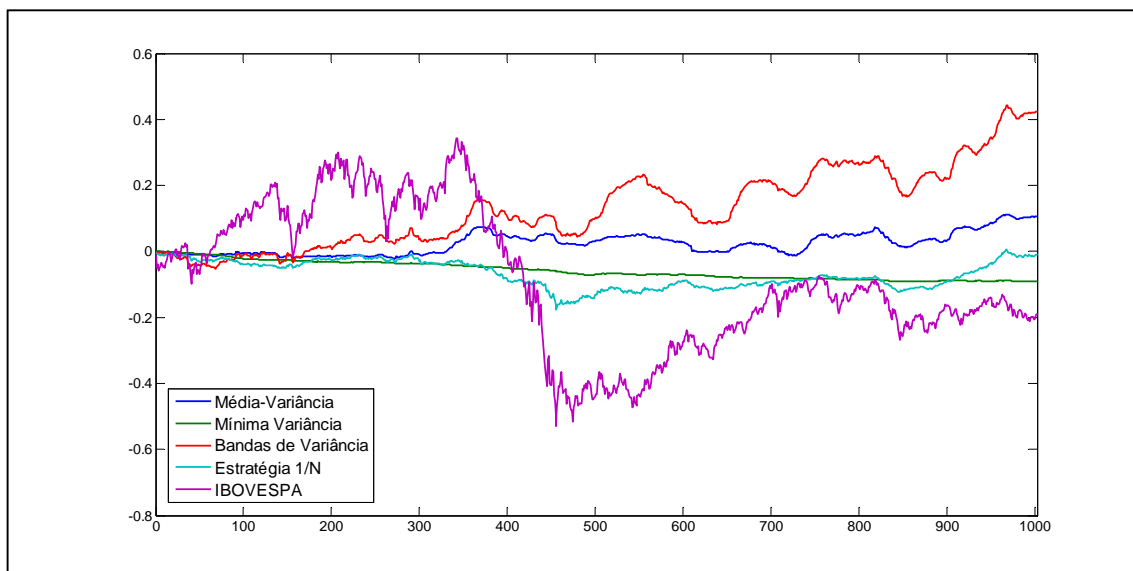
(IBOVESPA) ao longo de todo o período estudado para o modelo amostral de estimação da matriz de covariâncias. O gráfico corrobora os dados das médias e permite uma visão mais clara do comportamento de cada estratégia ao longo do tempo. Em termos de excesso de retorno acumulado percebe-se uma clara superioridade da estratégia de otimização por bandas de variância, seguida da estratégia de otimização por média-variância, auferindo um acumulado de mais de 100% no primeiro caso e mais de 40% no segundo (acima do retorno acumulado do ativo livre de risco).



**Figura 4 - Excesso de Retorno Acumulado para as estratégias de otimização por média-variância, mínima-variância e bandas de variância (Método Amostral de estimação da matriz de covariâncias), estratégia de alocação 1/N e IBOVESPA.**

**Fonte: Elaboração própria.**

A figura 5 mostra os retornos acumulados usando o modelo RiskMetrics™ para estimação das matrizes de covariâncias. Os resultados são análogos ao da figura 4, onde são mostrados os resultados com o modelo amostral para as covariâncias.



**Figura 5 - Excesso de Retorno Acumulado para as estratégias de otimização por média-variância, mínima-variância e bandas de variância (Método RiskMetrics™ de estimação da matriz de covariâncias), estratégia de alocação 1/N e IBOVESPA.**

**Fonte:** Elaboração própria.

Assim como na figura 4, verifica-se uma clara distinção de comportamentos entre os modelos que modelam a média (média-variância e banda de variância), sendo, portanto, estes superiores quando analisadas unicamente à luz dos excessos de retorno.

### 3.2.2 Variância

Os resultados dos cálculos das variâncias observadas para cada estratégia são expostos na tabela 2. Considerando a variância como *proxy* do risco para cada estratégia, é verificar um resultado semelhante para os dois modelos de estimação da matriz de covariâncias, de modo que a estratégia que mostrou-se mais conservadora foi a de mínima-variância (0,0001 e 0,0008 respectivamente para o modelo Amostral e o modelo RiskMetrics™ de estimação das covariâncias). Em contrapartida, os números mais elevados para a variância da carteira foram apresentados pela estratégia de bandas de variância, sendo que no modelo Amostral de estimação das covariâncias verificou-se um resultado de 0.1814 e no modelo RiskMetrics™ 0,1300. A estratégia da média-variância apresentou um resultado intermediário em relação ao

risco, 0,0422 e 0,0316 para, respectivamente o modelo Amostral e o RiskMetrics™ de estimação da matriz de covariâncias.

**Tabela 2 – Variância para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias.**

| Variância                          | Matriz de Covariâncias |              |
|------------------------------------|------------------------|--------------|
|                                    | Amostral               | RiskMetrics™ |
| <b>Markowitz (média-variância)</b> | 0.0422                 | 0.0316       |
| <b>Mínima-Variância</b>            | 0.0001                 | 0.0008       |
| <b>Bandas de Variância</b>         | 0.1814                 | 0.1300       |
| <b>1/N</b>                         | 0.0986                 | 0.0986       |

**Fonte:** Elaboração própria.

Interessante notar que a simples diversificação utilizada na estratégia 1/N mostrou-se também pouco atrativa em relação ao risco, indicando que a utilização de modelos quantitativos para alocação pode efetivamente ser mais eficiente do que estratégias ingênuas.

### 3.2.3 Índice de Sharpe

Na tabela 3 são apresentados os resultados dos cálculos do Índice de Sharpe para cada estratégia. Os maiores retornos ajustados ao risco foram evidenciados para a estratégia de média-variância e bandas de variância, pra todos os modelos de estimação da matriz de covariâncias. No modelo Amostral, obteve-se um Índice de Sharpe mais elevado para a estratégia de média-variância, ficando em segundo lugar a carteira otimizada por bandas de variância (0.1863 e 0.1760).

No caso do modelo RiskMetrics™ de estimação das covariâncias, a otimização por bandas de variância foi mais eficiente, auferindo um Índice de Sharpe igual a 0,0995, enquanto a carteira de média-variância obteve 0,0575.



**Tabela 3 – Índice de Sharpe para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias.**

| Índice de Sharpe                   | Matriz de Covariâncias |              |
|------------------------------------|------------------------|--------------|
|                                    | Amostral               | RiskMetrics™ |
| <b>Markowitz (média-variância)</b> | 0.1863                 | 0.0575       |
| <b>Mínima-Variância</b>            | 0.0671                 | -0.3336      |
| <b>Bandas de Variância</b>         | 0.1760                 | 0.0995       |
| <b>1/N</b>                         | -0.0016                | -0.0016      |

**Fonte:** Elaboração própria.

A estratégia 1/N e a carteira otimizada por mínima-variância apresentaram resultados inferiores, mostrando retorno ajustado ao risco pouco atrativo quando comparados com as demais estratégias.

### 3.2.4 *Turnover da carteira*

A tabela 4 mostra o *turnover* da carteira produzido por cada estratégia aplicada. Percebe-se uma rotatividade elevada das posições nas carteiras otimizadas por média-variância e bandas de variância para ambos os modelos de estimação das matrizes de covariâncias. No modelo amostral, a estratégia de bandas de variância mostrou um *turnover* de 0,0884 e a carteira de média-variância, 0,0718, ou seja, a cada período houve um rebalanceamento de 8,84% das posições no primeiro caso e 7,18% no segundo. Já a estratégia de otimização por mínima-variância apresentou resultado muito próximo de zero (0,0006), indicando que apenas 0,06% da carteira sofriam alterações em média, a cada período.

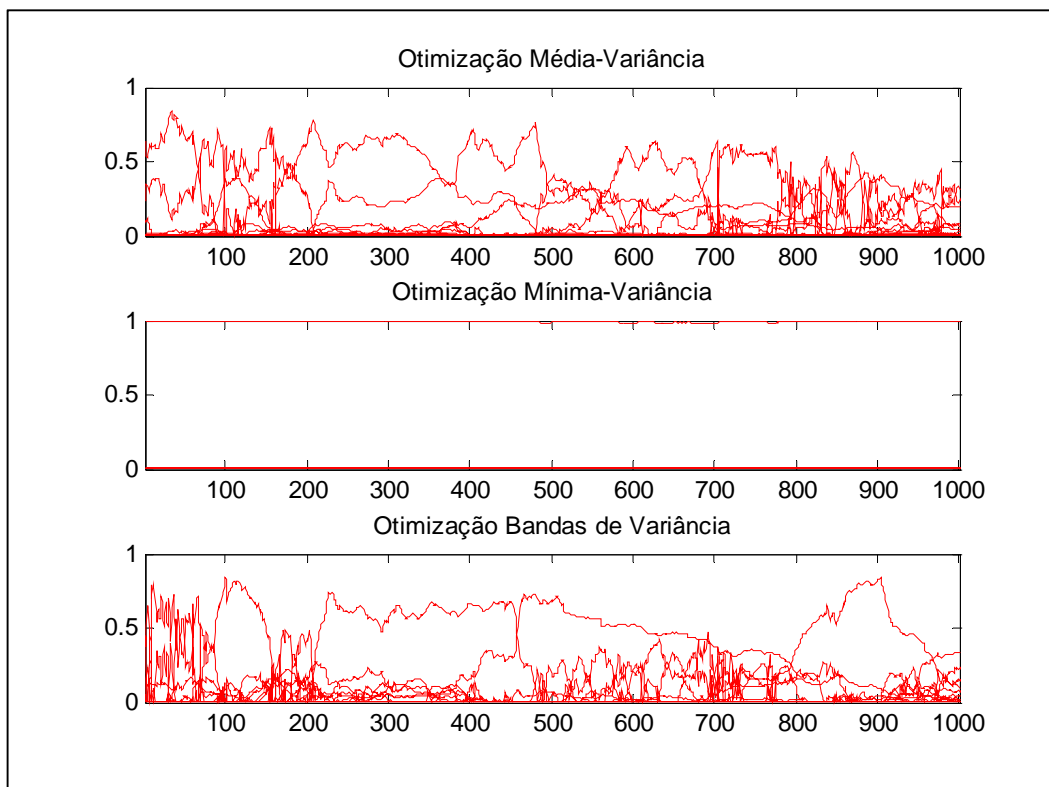
O modelo RiskMetrics™ mostrou resultados ainda mais elevados para o giro das posições em carteira, com 15,61% de *turnover* no caso de média-variância e 15,90% a cada período para a estratégia de bandas de variância. A carteira de mínima variância mostrou *turnover* de 3,80% a cada período.

**Tabela 4 – *Turnover* para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias.**

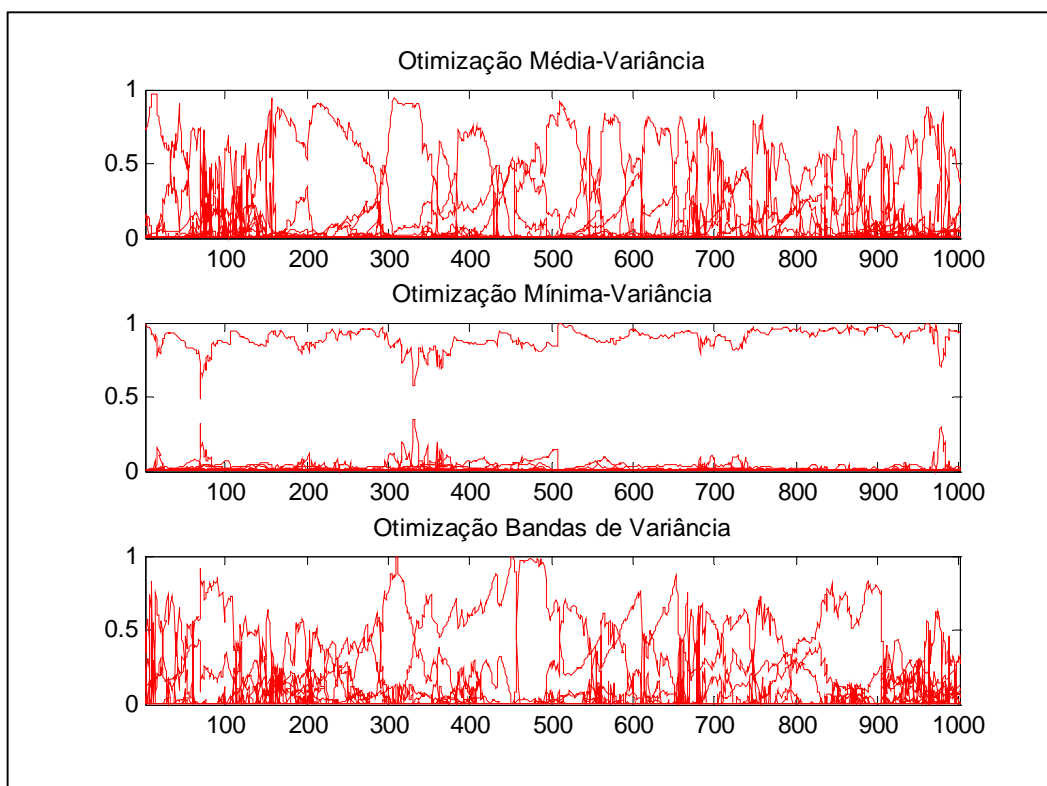
| <i>Turnover</i>                    | <b>Matriz de Covariâncias</b> |                     |
|------------------------------------|-------------------------------|---------------------|
|                                    | <b>Amostral</b>               | <b>RiskMetrics™</b> |
| <b>Markowitz (média-variância)</b> | 0.0718                        | 0.1561              |
| <b>Mínima-Variância</b>            | 0.0006                        | 0.0380              |
| <b>Bandas de Variância</b>         | 0.0884                        | 0.1590              |
| <b>1/N</b>                         | 0.0069                        | 0.0069              |

**Fonte:** Elaboração própria.

As figuras 5 e 6 mostram as variações nos pesos dos ativos em carteira ao longo do tempo para as diferentes estratégias de otimização aplicadas. É possível observar que, apesar de apresentarem elevados retornos, tanto em termos absolutos como ajustados ao risco, as estratégias de otimização por média-variância e por bandas de variância produziram carteiras pouco estáveis ao longo do tempo, justificando o elevado *turnover* calculado. Em contrapartida, a carteira de mínima variância fica praticamente estável ao longo do tempo, indicando uma provável maior facilidade para implementação da estratégia e menores custos.



**Figura 5 - Pesos dos ativos da carteira variando ao longo do tempo para os modelos de otimização por média-variância, mínima variância e bandas de variância. Modelo amostral para estimação da matriz de covariâncias.**



**Figura 6 - Pesos dos ativos da carteira variando ao longo do tempo para os modelos de otimização por média-variância, mínima variância e bandas de variância. Modelo RiskMetrics™ para estimação da matriz de covariâncias.**

## 4 CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou comparar estratégias de otimização de carteiras com o intuito de identificar uma alternativa que seja mais adequada ao mercado brasileiro.

Para que fosse realizada a comparação, optou-se por utilizar um conjunto de opções de investimento contendo ativos líquidos e índices de mercado que possibilitassem a um gestor de carteiras a construção de um portfólio diversificado.

A alternativa escolhida foi o emprego de três estratégias de otimização (Média-Variância, Mínima-Variância e Bandas de Variância) associadas a dois diferentes métodos de estimação da matriz de variâncias e covariâncias (métodos Amostral e RiskMetrics™).

Verificou-se que, para a amostra utilizada, a aplicação do modelo que restringe limites para a variância (Bandas de Variância), apesar de não encontrado na literatura, foi capaz de produzir resultados atrativos para os ativos do estudo em termos de excesso de retornos absolutos e ajustados ao risco, com o benefício de ser facilmente alterado para diferentes níveis de risco (banda superior), ou seja, adaptável ao perfil do investidor. Da mesma forma, o modelo de otimização por média-variância também apresentou resultados positivos nos diversos aspectos avaliados para os dados utilizados.

Por outro lado, a evidência de elevado *turnover* nos portfólios otimizados por essas estratégias, indica que deve haver certa cautela por parte do investidor para a aplicação prática dos modelos apresentados, uma vez que, associadas ao giro da carteira incidem custos de transação que podem deteriorar os resultados. Além disso, o elevado *turnover* também está associado à dificuldade de implementação em virtude do recorrente ajuste inexato devido aos tamanhos dos lotes negociados nos mercados reais e a baixa liquidez de lotes fracionários.

Para solucionar os problemas acarretados pelo elevado *turnover*, sugere-se a aplicação de modelos alternativos para estimação das matrizes de variâncias e covariâncias. Estudos como o de Santos (2010), sugerem que a aplicação de estimadores robustos implica em redução de *turnover* da carteira já que estes modelos reconhecem explicitamente que o resultado de um processo de estimação não é um ponto, mas um conjunto incerto onde a verdadeira média e variância incidem com certo grau de confiança.

## REFERÊNCIAS

- ALARCON, C. M. **Avaliação de modelos de *Value-at-Risk* para ações**. 2005. 144f. Dissertação (Mestrado em Economia) – Instituto de Economia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- ALEXANDER, C. **Market Risk Analysis**. John Willey & Sons, 2008.
- BAUSYS, M. **The Performance of Minimum Variance Portfolios in the Baltic Equity Markets** (March 31, 2009). Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=1599709>>. Acesso em: 10/12/2010.
- BERNSTEIN, P. **Desafio aos deuses: a fascinante história do risco**. Rio de Janeiro, Campus, 1997.
- BRANDIMARTE, P. **Numerical Methods in Finance: a MatLab-based introduction**. Wiley Series in Probability and Statistics, 2002.
- CORNUEJOLS, G.; TÛTÛNCÛ, R. **Optimization Methods in Finance**. Cambridge, University Press, 2006.
- COSTA, F. **Desafio aos economistas**. Disponível em: <<http://www.eco.unicamp.br/artigos/artigo49.htm>>. Acesso em 15/11/2010.
- DANTAS, A. L. **Otimização multiperíodo por média-variância sem posições a descoberto em ativos de risco**. 2006. 67 p. (Mestrado) – ESCOLA POLITÉCNICA, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J. (2009). **Portfolio selection with robust estimation**. *Operations Research, forthcoming*.
- DUARTE JÚNIOR, A. M. **Gestão de risco para fundos de investimentos**. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2005.
- FABOZZI, F.J.; FOCARDI S.M.; KOLM P.N. **Trends in Quantitative Finance**, CFA Institute monograph, 2006.
- FABOZZI, F., KOLM, P., PACHAMANOVA, D., FOCARDI, S. **Robust Portfolio Optimization and Management**, Wiley, New Jersey, 2007.
- FOCARDI, S.; FABOZZI, F. **The mathematics of financial modeling and investment management**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007. 778 p
- GARCIA, V. S. Gerenciamento de risco em instituições e o Novo Acordo de Capital. In: LEAL, R. ; VARGA, G. (org.). **Gestão de investimentos e fundos**. Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2006. 480 p. p. 53-76.

GOMES, J. R. Desafios na integração do controle de riscos em bancos brasileiros. In: Duarte Jr., A. M. & Varga, G. (org.). **Gestão de riscos no brasil**. Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2003. 833 p. p. 27-38.

GRANT, M. C.; BOYD, S. P. (2008). **Cvx: Matlab software for disciplined convex programming** (web page and software). Disponível em: <<http://stanford.edu/~boyd/cvx>>. Acesso em: 20/09/2010.

JAGANNATHAN, R.; MA, T. (2003). **Risk Reduction in Large Portfolios**: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *The Journal of Finance*, 58:1651–1684.

JORION, P. **Value-at-Risk** – A nova fonte de referência para o controle do risco de mercado. São Paulo: BM&F, 1998.

J.P.MORGAN & REUTERS. **RiskMetrics™** – Technical Document. New York, Fourth Edition, 1996.

KEYNES, J. M. **A Teoria Geral do Emprego, do Juro e da Moeda**. Editora Atlas, 1990. Original, 1936.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1991. 270p

MARKOWITZ, H. **Portfolio selection**. *Journal of Finance*, p.p.77–91, 1952.

MICHAUD, R.; MICHAUD, R. **Efficient Asset Management**: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation. New York: Oxford University Press, 2008.

MOLLICA, M. A. **Uma avaliação de modelos de Value-at-Risk**: comparação entre métodos tradicionais e modelos de variância condicional. 1999. 92f. Dissertação (Mestrado em Economia), FEA-USP, São Paulo, 1999.

NABHOLZ, R. B.. **Seleção ótima de ativos multi-período com Restrições Intermediárias utilizando o critério de média variância**. 2006. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle – Escola Politécnica - USP.

PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Microeconomia**. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

SANTOS, A. A. P. **The Out-of-sample Performance of Robust Portfolio Optimization**. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 8, p. 141-166, 2010.

SECURATO, J. R. **Cálculo financeiro das tesourarias**: bancos e empresas. 4. ed. São Paulo: Saint-Paul Editora, 2008.

VARGA, G.; LEAL, R.(org.). **Gestão de Investimentos e Fundos**. Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2006.